

5 Dames à empiler

Il s'agit d'un jeu solitaire. On a un damier de taille $n \times n$. Sur chaque case, on pose un jeton (une dame). Le but est d'empiler tous les jetons pour faire une seule grande pile.

Pour cela, la règle est qu'on peut empiler une pile sur une pile d'une case adjacente à condition que la pile d'arrivée soit au moins aussi haute que la pile de départ. On déplace la pile entière à chaque fois, on ne peut pas la scinder. On ne peut pas sauter, ni utiliser les diagonales.

Exemple: si sur la case A il y a une pile de 2, et sur la case B juste à côté, une pile de 4, on peut déplacer la pile de la case A sur la case B : la case A est vide et la case B a une pile de 6. On ne peut pas aller dans l'autre sens (on aurait pu aller dans les 2 sens si les 2 piles étaient de tailles égales). On ne peut jamais déplacer une pile sur une case vide.

Le but est d'obtenir une seule pile à la fin, sinon le moins de piles possibles.

Exemple: sur un damier 3×3 c'est très facile d'arriver à une seule pile.

Problème. *Pour quelles tailles de grille est-il possible d'obtenir une seule pile ?*

Sinon, quelle est le nombre minimal de piles qu'on peut obtenir en fonction de la taille de la grille?

Par exemple, que se passe-t-il par exemple pour un échiquier 8×8 ou un damier 10×10 ? Il vaut probablement mieux commencer par des petites tailles de damier.

Que se passe-t-il sur des damiers rectangulaires ? Pour un damier 4×1 , 5×1 , $n \times 1$? $n \times 2$? ...

Si on ne sait pas exactement déterminer le nombre minimal de piles qu'on peut obtenir, on peut essayer de le majorer ou de le minorer; par exemple si sur un damier 10×10 , on arrive à regrouper les pions en 13 piles, alors on sait que le nombre minimal est ≤ 13 (majoration). Si on arrive à démontrer qu'on ne peut pas arriver à faire 2 piles, alors le nombre minimal est au moins 3 (minoration).