

Le collectionneur

(Sujet proposé par J.-P. Delahaye)

Un collectionneur d'une série de vignettes s'intéresse par exemple aux onze cartes des joueurs de l'équipe de foot de son pays qu'il trouve une par une dans les paquets de céréales achetés pour son petit déjeuner.

Dans sa formulation générale le problème envisage qu'il y a N vignettes et qu'elle sont obtenues les unes après les autres au hasard. Le but est d'avoir au moins un exemplaire de chacune des vignettes, ce qui est rendu difficile car on tire plusieurs fois les mêmes, et plus on s'approche du but, plus la probabilité de tirer celles qui manquent se réduit.

On supposera ici qu'à chaque tirage chacune des N vignettes a exactement une chance sur N de se présenter. (Dans la réalité ce n'est sans doute pas toujours le cas et certaines vignettes sont volontairement rendues rares par les organisateurs des tirages.)

Question 1

Il y a seulement deux vignettes différentes. Faites des expériences avec des vignettes en papier, ou avec un programme d'ordinateur pour évaluer combien de vignettes il faut acquérir en moyenne pour avoir les deux vignettes.

Question 2

Pouvez-vous développer un argument mathématique pour démontrer le résultat trouvé expérimentalement à la question 1 ?

Question 3

La formule suivante pour N vignettes différentes a été proposée :

Pour avoir chacune de N vignettes quand il y en a N , il faut en moyenne se procurer T_N vignettes avec :

$$T_N = N \times (1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/N).$$

Pouvez-vous la vérifier expérimentalement pour $N = 3$ (avec des vignettes en papier, ou avec un ordinateur).

Question 4

En admettant la formule donnée à la question 3 pouvez-vous en déduire :

•A• Combien il faut faire de lancers en moyenne d'un dé à 6 faces pour être certain d'avoir obtenu au moins une fois '1', au moins une fois '2', ..., au moins une fois '6' ?

•B• Combien de décimales il faut examiner dans un nombre écrit en base 10 dont on pense que les chiffres sont comme tirés au hasard, pour avoir au moins un '0', au moins un '1', ..., au moins un '9' ?

Que penser alors du nombre Pi ?

•C• Le collectionneur des vignettes des 11 joueurs de l'équipe de foot doit attendre combien de temps en moyenne pour avoir l'équipe au complet ?

•D• Quand il a 9 vignettes différentes combien de temps doit-t-il attendre en plus en moyenne pour avoir les 11.

Question 5

Etudier avec une calculatrice les sommes

$$S_1 = 1$$

$$S_2 = 1 + 1/2$$

$$S_3 = 1 + 1/2 + 1/3$$

...

$$S_N = 1 + 1/2 + 1/3 + 1/4 + \dots + 1/N$$

Pensez-vous que quand N tend vers l'infini S_N tend vers l'infini ?

Pouvez-vous justifier votre réponse ?