3 sujets pour MATh.en.JEANS

Emmanuel Militon

Variantes sur le jeu de Nim

Pour celles et ceux qui aiment jouer à des jeux auxquels on est sûr de gagner.

Le jeu de Nim se joue à deux joueurs de la manière suivante. On dispose 30 allumettes côtes à côtes. Chacun son tour, chaque joueur prend une, deux ou trois allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu la partie.

Il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. La trouverez-vous ? Que se passe-t-il si l'on change le nombre d'allumettes ou si l'on autorise chaque joueur à prendre plus d'allumettes à chaque coup.

On pourra explorer d'autres variantes de ce jeu.

Première variante : on dispose quatre rangées de 30 allumettes et chaque joueur ne peut prendre des allumettes que dans une rangée. Que se passe-t-il si on change le nombre d'allumettes dans chaque rangée, avec éventuellement des nombres différents d'allumettes dans chaque rangée ? Que se passe-t-il si on modifie en plus le nombre de rangées ?

Deuxième variante : On dispose les allumettes en carré et, à chaque coup, un joueur ne peut prendre que des allumettes consécutives d'une même ligne ou d'une même colonne.

Vous pouvez également inventer vos propres règles.

Emmanuel Militon

Évolution d'une population, le modèle logistique

Enfin un sujet qui sert à quelque chose !

Dans un environnement à ressources limitées, l'évolution d'une population animale (ou de cellules, de bactéries, etc...) peut être modélisée de la manière suivante. La population lors de l'année n sera représentée par un nombre réel $x_n \in [0, 1]$, qui est le rapport entre la population lors de l'année n et la population maximale possible dans cet environnement.

Le modèle logistique prévoit alors que la population lors de l'année $n + 1$ sera alors

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

L'idée du modèle est que, plus la population lors de l'année n est grande, plus elle sera apte à se reproduire, d'où le facteur x_n. Néanmoins, si la population est trop importante, les ressources viendront à manquer pour entretenir la population, ce qui explique le facteur $1 - x$.

Dans quels cas la population va rester exactement la même chaque année ? Peut-on trouver d'autres cas où la population sera la même tous les deux ans ? tous les 3 ans ? Même question en remplaçant 2 et 3 par d'autres nombres. Y a-t-il des cas où, à l'inverse, la population n'est jamais la même d'année en année ?

Dans quels cas la population va-t-elle s'éteindre (c'est-à-dire que la suite (x_n) va tendre vers 0) ?

Quelle est la population moyenne maximale que l'on peut obtenir sur un grand nombre d'années ?