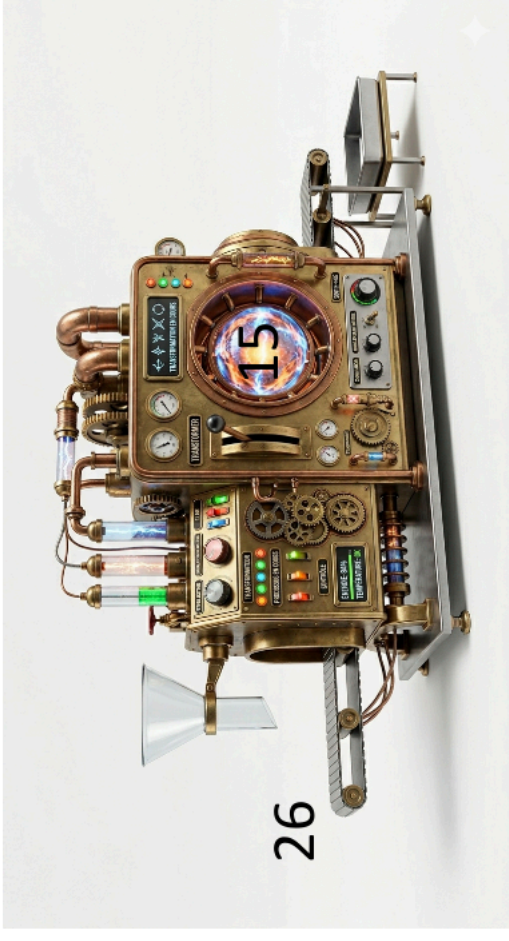


Problème 1 : la machine

Vous êtes face à une machine mathématique. La notice d'utilisation précise différentes choses :

1. La machine prend un nombre en entrée qu'elle transforme en un nombre en sortie.
2. Quand on met un nombre dans la machine, on obtient toujours le même résultat. On note $M(a)$ ce que renvoie la machine quand on met le nombre a .
3. La machine n'accepte que des nombres entiers, positifs ou négatifs.
4. Si p est un nombre premier, $M(p) = 1$.
5. Si a et b sont deux nombres, $M(ab) = M(a)b + aM(b)$.



Questions :

- Que valent $M(0)$? $M(1)$? $M(4)$? $M(6)$? $M(-1)$?
- $12 = 3 \times 4 = 2 \times 6$. En utilisant la règle 5, obtient-on le même résultat pour les deux produits ? Même question pour tous les produits $ab = a'b'$.
- Existe-t-il des nombres a pour lesquels $M(a) = a$? Lesquels ?
- Si on remet le résultat de la machine dans la machine encore et encore, finit-on toujours par arriver au même résultat ? Au bout de combien de tours ? Peut-on revenir au point de départ au bout de 2 tours ? n tours ?
- La machine pourrait-elle être améliorée pour prendre des fractions ? Si oui, comment ? Sinon, pourquoi ?