Sujets MATh.en.JEANS 2025-2026

Charles Miranda[1]

[1]Centrale Nantes, Nantes Université, Laboratoire de Mathématiques Jean Leray

Table des matières

1 Empiler des pièces de monnaies dans une boîte

Alice possède des pièces de monnaies de 1 €. Elle souhaite placer les pièces dans une boîte en métal qui fait la même hauteur que les pièces. Problème : elle ne peut pas superposer les pièces au risque de ne pas pouvoir fermer la boîte, et elle doit choisir la boîte avec le plus petit rayon possible.

Nous nous intéressons à la manière d'arranger les pièces de façon à avoir la plus petite boîte possible.

Comment doit-elle disposer les pièces pour que la boîte se ferme ? Et quelle est la taille de la plus petite boîte ?

2 Les pièces de *Tetris*

Développé par Alekseï Pajitnov en 1984, le jeu *Tetris* est un succès international. Les règles sont simples : réaliser des lignes complètes en déplaçant des *tétraminos* qui défilent depuis le haut jusqu'au bas. Mais que sont donc les *tétraminos* ?

On souhaiterait étudier les *tétraminos*, mais avec un nombre de carrés différent ! Un *polyomino* est un collage de carrés ne formant qu'une seule pièce, par exemple

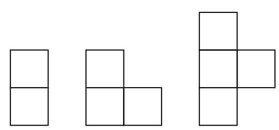

FIGURE 1 – Exemples de polyomino

1. **Imaginer tous les *polyominos* possibles que l'on peut créer avec 1, 2, 3 et 4 carrés.**
2. **On considère tous les tétraminos obtenus avec quatre carrés. Peut-on recouvrir un rectangle composé de 20 carrés de même taille ?**

3 Problème du chevalier

Au jeu d'échecs, le *cavalier* ne peut se déplacer qu'en L. Le *problème du chevalier* consiste à visiter chaque case de l'échiquier sans y repasser. Le parcours est dit *fermé* si le chevalier retourne sur sa position de départ. On s'intéresse aux conditions pour qu'un tel parcours existe, et on se place dans une configuration telle qu'aucun côté de l'échiquier ne peut être de longueur 1.

1. **Existe-t-il un parcours fermé si l'échiquier est un carré ? Si oui, à quelles conditions ?**
2. **Existe-t-il un parcours fermé si l'échiquier est un *rectangle* ? Si oui, à quelles conditions ?**

4 Placement de détecteurs de fumée

1	2	3	
5		7	8
9		11	

Figure 2 – Exemple de maison

On souhaite placer des détecteurs de fumée dans une maison, avec des pièces séparées par des murs (voir par exemple la figure ci-dessus) que l'on numérote. La maison peut avoir la forme que l'on souhaite. On aimerait placer le moins de détecteurs possibles afin de couvrir entièrement la maison. Un détecteur peut couvrir la pièce dans laquelle il est situé, et également les pièces adjacentes : par exemple, un détecteur dans la pièce 1 peut couvrir les pièces 2 et 5.

1. **Proposer une méthode permettant de couvrir entièrement la maison avec le minimum de détecteurs possibles.**

   Maintenant, on suppose qu'un détecteur de fumée a une portée plus importante. Il peut couvrir la pièce dans laquelle il se situe, les pièces adjacentes et les pièces adjacentes à celles-ci. Par exemple, un détecteur en 1 peut couvrir les pièces 2 et 5, mais aussi les pièces 3 et 9, et un détecteur en 7 peut couvrir les pièces 8, 11, 3 et 2.

2. **Proposer une méthode permettant de couvrir entièrement la maison avec le minimum de détecteurs possibles, mais avec les nouvelles règles.**

5 Relier des points sur un cercle

On trace un cercle et on place des points au hasard sur le bord de ce cercle (on choisit le nombre de points que l'on veut placer, par exemple 3, 4, 5 points). On relie les points deux à deux par des segments.

1. **Combien y a-t-il de segments ?**
2. **Combien y a-t-il d'intersections ?**
3. **En combien de régions le cercle est-il découpé ?**

A Solutions

A.1 Empiler des pièces de monnaies dans une boîte 1

Les configurations optimales peuvent être trouvées ici https://fr.wikipedia.org/wiki/Empilement_de_cercles_dans_un_cercle, mais le but est de les faire trouver par les étudiant(e)s. Pour ce qui est du calcul du rayon du cercle extérieur, fixons $r = 1$ le rayon des petits cercles, et

1. **2 pièces** : $R = r + r = 2$.
2. **3 pièces** : le centre des cercles forment un triangle équilatéral, dont le centre de gravité est le centre du cercle extérieur. La distance du centre de gravité à un des sommets est $\frac{\sqrt{3}}{2} \times 2r - \frac{\sqrt{3}}{6} \times 2r = \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2r$. En ajoutant le rayon d'un cercle inscrit, on a $R = r + \frac{1}{\sqrt{3}} \times 2r = 1 + \frac{2}{\sqrt{3}}$.
3. **4 pièces** : le centre des cercles forment un carré, dont le centre de gravité est le centre du cercle extérieur. La longueur d'un côté du carré est $2r$, par conséquent la distance entre le centre de gravité et un des sommets est $\sqrt{2}r$. D'où, $R = r + \sqrt{2}r = 1 + \sqrt{2}$.
4. **5 pièces** : le centre des cercles forment un pentagone, dont le centre de gravité est le centre du cercle extérieur. Le rayon du cercle circonscrit dun pentagone régulier est $r' = \frac{1}{2}\sqrt{2(1 + \frac{1}{\sqrt{5}})} \times 2r$. Par conséquent, on a $R = r + \sqrt{2(1 + \frac{1}{\sqrt{5}})}r = 1 + \sqrt{2(1 + \frac{1}{\sqrt{5}})}$.
5. **6 pièces** : le centre des cercles forment un hexagone, dont le centre de gravité est le centre du cercle extérieur. Le rayon du cercle circonscrit d'un hexagone est exactement la longueur d'un côté, d'où $r' = 2r$. Il vient $R = r + 2r = 3$.
6. **7 pièces** : la configuration est la même que pour 6 pièces, où le cercle est rempli par une autre pièce. Par conséquent $R = 3$.

A.2 Les pièces de *Tetris* 2

Tous les polyominos peuvent être trouvés ici : https://minos.tessera.li/. L'idée est de les faire tous trouver par les élèves. Concernant la question 3, elle provient du site https://maths.enseigne.ac-lyon.fr/spip/spip.php?article677. L'astuce est de colorier le rectangle et les pièces comme un jeu de dames ou d'échecs. On remarque que le nombre de cases bleu clair ne sont pas les mêmes, par conséquent la réponse est négative.

A.3 Problème du chevalier 3

Les solutions peuvent être trouvées ici https://fr.wikipedia.org/wiki/Probl%C3%A8me_du_cavalier#Analyse_math%C3%A9matique.

A.4 Placement de détecteurs de fumée 4

1. Une stratégie est de colorier la maison en damier, et de placer les détecteurs sur les cases noires.
2. Une stratégie est de dresser un tableau avec les pièces connectées (selon les règles), et de placer un détecteur dans la pièce qui a le plus de connexion, et de procéder de même pour les autres pièces.

A.5 Relier des points sur un cercle 5

Il s'agit d'un problème combinatoire, mais accessible aux étudiant.e.s. Notons n le nombre de points placés sur le cercle.

1. Pour tracer un segment, il faut choisir 2 points parmi les n points. Le nombre de segments est alors $\binom{n}{2}$. Une approche intuitive est de remarquer que si on a n points, et $S(n)$ segments, alors lorsque l'on ajoute un nouveau point, il faut le relier aux n autres points. Il suit, $S(n+1) = S(n) + n$.
2. Une intersection est caractérisée par deux segments, soit quatre points. Par conséquent, pour avoir une intersection, il faut choisir quatre points, d'où le nombre d'intersections est $I(n) = \binom{n}{4}$. Intuitivement, si on a $I(n)$ intersections, lorsque l'on ajoute un point, il faut compter les nouvelles intersections. Pour cela, comme le nouveau point est fixé, il suffit de choisir 3 points parmi les n points précédents. D'où, $I(n+1) = I(n) + \binom{n}{3}$.
3. Lorsque l'on ajoute un nouveau point, on ajoute n nouveaux segments, donc on augmente le nombre de régions $R(n)$. Quand on trace un segment qui intersecte k cordes déjà tracées, ce segment coupe $k+1$ régions existantes en deux, donc il crée $k+1$ nouvelles régions. Si on somme sur les n nouveaux segments, on a

   $$\text{Nombre nouvelles régions} = \sum_{\text{Segment}} (1 + \text{Nombre d'intersection sur ce segment})$$

On sait que lorsqu'on ajoute un nouveau point, on ajoute $\binom{n}{3}$ intersections, donc le nombre de nouvelles régions est $n+\binom{n}{3}$. D'où, $R(n+1) = R(n) + n + \binom{n}{3}$. Et on peut montrer que $R(n) = 1 + \binom{n}{2} + \binom{n}{4}$.

Possibilité d'étendre en 3D : si les 4 points ne sont pas coplanaires, il n'y a aucune intersection.