I - SUITE DE FAREY

La suite de Farey est à la base du théorème fondamental de la phyllotaxie.

Recherche 1: Qu'est ce que la phyllotaxie ? Chercher des illustrations et des exemples de modélisation.

La suite de Farey d'ordre $n \in \mathbb{N}$, F_n *, est l'ensemble discret des fractions irréductibles* $\frac{p}{q}$ *telles que* $q \leq n$ *et telles que ses termes, entre 0 et 1, soient ordonnés de manière croissante.*

Voilà quelques exemples de séquences de Farey pour les quatre premières valeurs de n:

$\mathrm{F}_1=\{\frac{0}{1},\frac{1}{1}\}$
$\mathrm{F}_2=\{\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{1}\}$
$\mathrm{F}_3=\{\frac{0}{1},\frac{1}{3},\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{1}{1}\}$

Les suites F_i *sont définies par l'union de* F_1 *avec les suites de médiantes.*
Ces médiantes sont les fractions calculées suivant la définition: $\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=\frac{a+c}{b+d}$, *où* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *sont des fractions adjacentes de* F_i.

Par exemple, F_3 *a les éléments* $\frac{0}{1}$ *et* $\frac{1}{1}$ *qui appartiennent à* F_1, *mais aussi les éléments suivants:*

$\frac{0+1}{1+1}=\frac{1}{2}$ *tel que* $\frac{0}{1}<\frac{1}{2}<\frac{1}{1}$, *médiante de* $\frac{0}{1}$ *et* $\frac{1}{1}$ *dans* F_2;
$\frac{0+1}{1+2}=\frac{1}{3}$ *tel que* $\frac{0}{1}<\frac{1}{3}<\frac{1}{2}$, *médiante de* $\frac{0}{1}$ *et* $\frac{1}{2}$ *dans* F_3;
$\frac{1+1}{1+2}=\frac{2}{3}$ *tel que* $\frac{1}{2}<\frac{2}{3}<\frac{1}{1}$, *médiante de* $\frac{1}{2}$ *et* $\frac{1}{1}$ *dans* F_3.

La médiante de $\frac{2}{3}$ *et* $\frac{1}{1}$, $\frac{2+1}{3+1}=\frac{3}{4}$ *ainsi que celui de* $\frac{1}{3}$ *et* $\frac{1}{2}$, $\frac{1+1}{3+2}=\frac{2}{5}$, *ne font pas partie de la suite* F_3, *car leurs dénominateurs sont plus grands que 3.*

Exercice : Déterminer F_4 **et** F_5**.**

Une propriété intéressante est que si $\frac{a}{b}$ *e* $\frac{c}{d}$ *sont des fractions consécutives de la suite , les produits* $a \times d$ *et* $b \times c$ *sont des entiers consécutifs, comme le montre le théorème ci-dessous:*

Théorème 3:[1]

1. Si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont consécutifs dans F_n, quelque soit $n \in \mathbb{N}$, alors $|ps-qr|=1$.

2. Réciproquement, si $|ps-qr|=1$, alors $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont consécutifs dans F_n pour $n \geqslant \max(q,s)$ et $n<q+s$, et ils sont séparés par $\frac{p+r}{q+s}$ dans F_{q+s}.

OBJECTIF 1:

Compléter les détails de la démonstration, suivant la structure de la démonstration présentée ci-dessous:

1- Utiliser induction finie pour montrer que: si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont consécutifs dans F_n, quelque soit $n \in$ N, alors $|ps - qr| = 1$:

(i) Montrer que que cela est vrai pour $n = 2$.

(ii) Supposons le résultat valable pour $n = m$. Montrer que le résultat est valable pour $n = m + 1$. Pour cela, montrer que si $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont successifs dans F_n, deux éléments successifs de F_{m+1} seront $\frac{p}{q}$ et $\frac{r+p}{q+s}$ ou $\frac{r}{s}$ et $\frac{r+p}{q+s}$.
Comme $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont successifs dans F_n, on a $|ps - qr| = 1$ par hypothèse d'induction.
Montrer que $|q(p + r) - p(q + s)| = 1$ et $|s(p + r) - r(q + s)| = 1$
Expliquer ce que cela signifie et conclure.

2- Soit la fonction $f(t) = \frac{p+tr}{q+ts}$ où nous supposons $t \in [0; +\infty[$et $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ sont des éléments de F_n tels que $|qr - ps| = 1$.

(i) Montrer que f est continue et injective.
(ii) Utiliser la définition pour calculer la dérivée de $f(t)$ et montrer que cette dérivée est positive.
(iii) Conclure que f est croissante dans $[0, +\infty[$ et qu'elle assume des valeurs entre $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$.
(iv) Montrer que si $t \in \mathbb{Q}$, $f(t) \in \mathbb{Q}$.
(v) Montrer que si $f(t) \in \mathbb{Q}$, $t \in \mathbb{Q}$.
(vi) Soit $t = \frac{u}{v}$ où PGCD$(u, v) = 1$ et $u > 0$ et $v > 0$.
Montrer que $f\left(\frac{u}{v}\right)$ appartient à l'ensemble des fractions rationnelles irréductibles dans l'intervalle $\left[\frac{p}{q}, \frac{r}{s}\right]$.
(vii) Entre ces fractions, la fraction qui admet le plus petit dénominateur est $\frac{p+r}{q+s}$, où nous considérons $u = v = 1$.
(viii) On a donc une fraction telle que $\frac{p}{q} < \frac{p+r}{q+s} < \frac{r}{s}$, avec $q + s > n \geqslant \max(q, s)$.
Comme $|ps - qr| = 1$, montrer que $|q(p + r) - p(q + s)| = 1$ et que $|s(p + r) + r(q + s)| = 1$
(ix) Conclure que $\frac{p+r}{q+s}$ est irréductible.
(x) Conclure que $\frac{p}{q}, \frac{p+r}{q+s}, \frac{r}{s}$ sont consécutifs dans F_{q+s} et que $\frac{p}{q}$ et $\frac{r}{s}$ le sont dans F_n.

II – FONCTION TOTIENT D'EULER

La quantité d'éléments de la suite de Farey d'ordre n, F_n, *est la quantité de fractions irréductibles, inférieures ou égales à 1, avec dénominateurs dans l'intervalle* $[0, n]$.

Cette quantité peut s'exprimer en termes de la fonction totient d' Euler, $\varphi(n)$, *ainsi définie:*
Pour $n \in \mathbb{N}$, $\varphi(n)$ *est la quantité de fractions irréductibles avec dénominateur* n *et numérateur variant dans l'intervalle* $[0, n - 1]$.

OBJECTIF 2: Selon cette définition, quelle est la quantité d'éléments de F_n ?

III - REPRÉSENTATION GÉOMÉTRIQUE DE LA SUITE DE FAREY

Les cercles de Ford sont une représentation des fractions rationnelles. A chaque nombre rationnel $\frac{p}{q}$*, on trace un cercle de rayon* $\frac{1}{2q^2}$*, tangent à la droite qui représente les nombres réels au point d'abscisse* $\frac{p}{q}$*.*

Théorème 4 :
Les cercles de Ford associés à une séquence de Farey sont tangents extérieurement, ou disjoints.

OBJECTIF 3: Démontrer ce théorème 4.

Il suit de ce théorème que le cercle qui représente la fraction médiane de ces fractions, $\frac{a+c}{b+d}$*, se trouve entre les deux cercles qui correspondent aux fractions* $\frac{a}{b}$ *et* $\frac{c}{d}$ *et ces trois cercles sont deux-à-deux tangents.*

OBJECTIF 4:
Deux cercles, C_1 et C_2, et une droite r sont donnés en position.
C_1 et C_2 sont tangents à r et sont disjoints ou tangents extérieurement.

2-1. Tracer, avec règle et compas (seulement !), un cercle tangent à ces deux cercles et à la droite donnés. Utilisez votre démonstration du théorème 4.

2-2.Tracer, avec règle et compas (seulement !, sans faire appel à la géométrie analytique), un cercle tangent à ces deux cercles et à la droite donnés, en transformant d'abord le problème de sorte qu'il devienne: tracer, avec règle et compas (seulement !), un cercle tangent à deux droites (qui se croisent ou pas) et à un cercle donnés.

Indication: Recherchez sur le thème "inversion dans le cercle". Peut-être aurez-vous aussi besoin de revoir les concepts de translation et d' homothétie.