



# Présentation des sujets MATHenJeans

Simon Delalande

IMT – Université de Toulouse

09/10/2025



[www.math.univ-toulouse.fr](http://www.math.univ-toulouse.fr)



# 1. La dérive de la méduse

- Une méduse dérive dans un océan. Chaque jour elle peut soit monter d'un mètre ou descendre d'un mètre avec la même probabilité  $1/2$ .
- Si elle touche le fond (niveau  $0$ ), elle sera tuée par les prédateurs marins. De même si elle atteint la surface (niveau  $a$ ) ou elle sera tuée par la pollution. Elle part d'un niveau  $x$  entre  $0$  et  $a$
- Est-il possible que la méduse survive indéfiniment ?
- En fonction de  $x$ , est-il plus probable que la méduse soit tuée par la pollution ou les prédateurs ?
- Combien de temps en moyenne vivra-t-elle ?

## 2. Quand le chaos nous guette

- Prenez un nombre strictement compris entre 0 et 1 que nous appellerons  $x$  puis calculez  $2x(1 - x)$ , recommencez avec le résultat est ainsi de suite. Par exemple, nous avons l'ensemble suivant :

$$1/3 \rightarrow 4/9 \rightarrow 40/81 \rightarrow \dots$$

- Vers quel nombre cette suite semble se diriger ? Est-ce le même nombre quelque soit le point de départ ?
- Faites maintenant la même chose en prenant la formule  $4x(1 - x)$  avec un chiffre  $x$  et  $x + 10^{-6}$ . Qu'observez-vous ?
- Toujours la même question mais cette fois avec  $3.1x(1 - x)$ .
- En fait, suivant les valeurs  $a$  de  $ax(1-x)$ , nous pouvons avoir un système stable ou chaotique. Le but de ce projet est d'observer en fonction de la valeur de  $a$  quand est-ce que nous sommes dans un système stable et quand est-ce que nous sommes dans un système chaotique.

### 3. Cryptologie et Statistique

Une façon d'encoder un texte est de prendre, par exemple, pour chaque lettre, la suivante ( $A \rightarrow B, B \rightarrow C, \dots, Y \rightarrow Z, Z \rightarrow A$ ).

En terme mathématique, si on associe à chaque lettre un chiffre ( $A=0, B=1, \dots, Z=25$ ), cela revient à ajouter 1 et à conserver le reste dans la division euclidienne par 26. Or, nous pourrions décider, par exemple, de multiplier le chiffre par 3, ainsi :

$$A = 0 \rightarrow 0 \times 3 = 0 \text{ donc } A \rightarrow A,$$

$$B = 1 \rightarrow 1 \times 3 = 3 \text{ donc } B \rightarrow D,$$

...

$$Z = 25 \rightarrow 25 \times 3 = 2 \times 26 + 23 \text{ donc } Z \rightarrow X.$$

### 3. Cryptologie et Statistique

Si on prend n'importe quelle fonction affine (donc de la forme  $f(x) = ax+b$ ), est-ce qu'on obtient toujours un codage que nous pouvons décrypter ?

Autrement dit, est-ce qu'à une lettre du texte crypté correspond une unique lettre du texte original ?

Est-ce qu'à deux couples  $(a, b)$  et  $(a', b')$ , le codage sera-t-il forcément différent ?

Existe-t-il d'autres fonctions qui permettent d'avoir des codages différents de ceux des fonctions affines ?

Imaginons qu'un texte crypté arrive et que vous n'avez pas la clé pour le décrypter. Si vous faites un décryptage par seconde, combien de temps faudra-t-il pour essayer tous les textes possibles ?

Au IX<sup>ème</sup> siècle, Al-Kindi a remarqué que certaines lettres apparaissaient plus souvent que d'autres. Il a donc proposé, si le texte est assez long, d'associer la lettre du texte crypté qui revient le plus souvent à la lettre le plus souvent utilisée dans la langue, et ainsi de suite.

Comment feriez-vous pour tester ce decodage ?

## 4. Chaîne alimentaire

Dans un parc, il y a une population de lions et de gazelles. En admettant qu'il y a  $N_L$  lions et  $N_G$  gazelles au début de chaque année, nous admettons qu'on observe :

- Pour chaque gazelle, une nouvelle naissance avec probabilité  $p_e^G$
- Pour chaque lion, une nouvelle naissance avec probabilité  $p_e^L$
- Chaque gazelle a une probabilité  $p_m^G \frac{1+N_L}{1+N_L+N_G}$  de mourir (soit naturellement, soit mangée par un lion)
- chaque lion a une probabilité  $\frac{N_L}{N_L+N_G}$  de mourir (soit naturellement, soit par manque de nourriture)

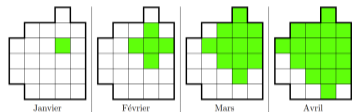
## 4. Chaîne alimentaire

Que se passera-t-il si les lions sont trop gourmands ( $p_m^G$  élevé) ? Si les gazelles font beaucoup d'enfants ( $p_e^G$  élevé) ? Ou les lions ( $p_e^L$  élevé) ?

On décide d'introduire dans le parc une nouvelle espèce d'animaux, la liozelle, qui mange des lions mais qui est mangée par des gazelles. Que va-t-il se passer ?

## 5. Propagation d'une espèce invasive

- Une espèce invasive se propage sur une île décomposée en carrés. Si on ne fait rien, à chaque mois qui passe elle se propage sur tous les carrés adjacents à ceux atteints au mois précédent.



- Une équipe de biologistes voudraient que l'espèce se repande dans toute l'île. Dans l'exemple précédent, où faudrait-il introduire l'espèce initialement pour que l'île soit recouverte le plus tôt possible ?
- Et si on commence avec deux carrés ?
- Un biologiste cherche à proposer la forme optimale d'une île avec un nombre fixe de carrés pour que l'espèce puisse l'envahir le plus vite possible ; pouvez-vous l'aider ? A l'opposé, quelle serait la forme et l'emplacement de départ les moins pratiques pour la propagation de l'espèce ?
- Mêmes questions avec un nombre de carrés d'espèce au départ quelconque.