

La conjecture de Proth-Gilbreath

J.-P. Delahaye

On prend la liste des 15 nombres premiers jusqu'à 47, et on la place sur une première ligne. En dessous on écrit (en décalant un peu) la ligne des valeurs absolues de la différence de deux termes consécutifs de la première ligne. On recommence pour obtenir une troisième ligne, etc.

2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43	47
	1	2	2	4	2	4	2	4	6	2	6	4	2	4
		1	0	2	2	2	2	2	4	4	2	2	2	
			1	2	0	0	0	0	2	0	2	0	0	
				1	2	0	0	0	2	2	2	2	0	
					1	2	0	0	2	0	0	0	2	
						1	2	0	2	2	0	0	2	
							1	2	0	2	0	2		
								1	2	2	2	2	2	
									1	0	0	0	0	
										1	0	0	0	
											1	0	0	
												1	0	
													1	0
														1

On remarque que chaque ligne à partir de la seconde commence par un 1.

Si on fait le calcul en prenant 100 nombres premiers au lieu de 15 on constate la même chose. Avec mille ou même un milliard de nombres premiers on vérifie encore que toutes les lignes sauf la première commencent par un 1.

Affirmer que c'est vrai avec un nombre quelconque de nombres premiers est une affirmation mathématique (énoncée par le français François Proth puis par un prestidigitateur américain Norman Gilbreath) que personne n'a su démontrer aujourd'hui. C'est ce qu'on nomme la « conjecture de Proth-Gilbreath ».

Question 1

Est-ce que la propriété de « toujours commencer par un '1' sauf la première ligne » est vraie quand on oublie un nombre premier sur la première ligne. Faites les calculs en oubliant le '2', en oubliant le '3', etc.

Faites des essais assez loin avec éventuellement une première ligne plus longue. Écrivez soigneusement votre conclusion. À votre avis, que se passe-t-il si on va vraiment loin et qu'on oublie un seul nombre premier ?

Question 2

À la place de la suite de nombres premiers, on place sur la première ligne

(a) la suite des nombres impairs 1, 3, 5, 7, ...

(b) la suite des carrés 1, 4, 9, 16, ...

(c) la suite des puissances de 2 : 1, 2, 4, 8, 16, ...

(d) la suite des puissances de 3 : 1, 3, 9, 27, ...

Que se passe-t-il ? Peut-on démontrer dans certains cas qu'il est vrai que toutes les lignes à partir de la seconde commencent pas un '1' ?

Question 3

Essayer d'autres suites mathématiques. Que se passe-t-il ?

Peut-on dans certains cas démontrer que l'équivalent de la conjecture de Proth-Gilbreath est vraie ?

Trouvez des idées de suites qui marchent ?

Question 4

En prenant d'autres suites vous constaterez peut-être que le triangle calculé (comme au-dessus) a des propriétés particulières. Faites des expériences (éventuellement avec un ordinateur) et proposer des résultats, avec, si c'est possible, des démonstrations.