Sujet 9

Nombres palindromes

J.-P. Delahaye

Les mots « gag », « non », « elle », « rotor », « ressasser » ont une propriété qui saute aux yeux : on peut les lire de droite à gauche aussi bien que de gauche à droite. On dit que ce sont des palindromes : « ressasser » est le plus long mot palindrome en français.

Si on néglige les blancs, les accents, les majuscules et la ponctuation, il devient possible de composer des phrases et même de longs textes palindromiques. Voici quelques exemples de phrases :

Élu par cette crapule. (Marcel Duchamp)

Noël a trop par rapport à Léon. (Sylvain Viart)

Rue Verlaine gela le génial rêveur. (Jacques Perry-Salkow)

Ésope reste ici et se repose. (Maître Capelo)

Le mathématicien préfère envisager les nombres palindromes. En trouver est facile puisque 0 et toute suite de chiffres ne commençant pas par 0 représente un nombre en base 10 et qu'on peut donc sans difficulté en écrire qui soient des palindromes : 242, 10001 ou 12321.

Voici le début de la liste infinie des palindromes de chiffres :

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 11, 22, 33, 44, 55, 66, 77, 88, 99, 101, 111, 121, 131, 141, 151, 161, 171, 181, 191, 202, 212, 222, 232, 242, 252, 262, 272, 282, 292, 303, 313, 323, 333, 343, 353, 363, …

Question 1. Combien sont-ils ?

(a) Combien existe-t-il de nombres palindromes en base 10 possédant *n* chiffres ? (faire attention aux 0 : 0 désigne un nombre, mais à part lui une suite de chiffres qui représente un nombre ne commence pas par 0).

Il faut distinguer le cas *n* pair du cas *n* impair.

(b) En déduire le nombre de nombres palindromes inférieurs à 10^n pour $n = 1, 2, 3, 4, ...$

Faire un tableau pour les réponses.

Question 2. Divisibilité, nombres premiers

(a) Vérifier sur quelques exemples que : si un nombre palindrome possède un nombre pair de chiffres alors il est divisible par 11.

(b) Est-ce général ? Pourquoi ?

(c) Les nombres palindromes ayant un nombre impair de chiffres peuvent-ils être des nombres premiers ?

(d) Formuler des conjectures au sujet des nombres premiers palindromes.

Question 3. Formules donnant des palindromes

(a) Il existe des méthodes pour construire des nombres palindromes qui ne sont pas des nombres premiers. En voici une.

1□1=1

11□11=121

111□111=12321

1111□1111=1234321

11111□11111=123454321

Est-ce que cette méthode donne toujours des palindromes quand on augmente le nombre de 1.

(b) Même question pour la méthode suivante :

11□11□11 = 1331

11□11□111 = 13431

11□11□1111 = 134431

...

(c) Même questions encore pour les méthodes suivantes :

11□111□(11...11) = 13566...66531

et 111□111□(11...11) = 136899...9998631

(d) Imaginez d'autres méthodes

Question 4. Et dans les autres bases ?

(a) Reprendre les questions que vous voulez en vous plaçant dans d'autres bases que la base 10.

(b) En particulier est-il vrai que « les palindromes ayant un nombre pair de chiffres en base *b*, sont multiples de (*b*+1) » ?

(c) Le nombre 105 est palindrome dans plusieurs bases : en effet : $105_{10} = 1221_{4} = 151_{8} = 77_{14} = 33_{34}$

Trouvez d'autres exemples.

Question 5. Sommes de nombres palindromes

(a) En additionnant trois nombres premiers au plus, on peut obtenir tout entier impair. Cette affirmation était dénommée « conjecture faible de Goldbach », mais c'est maintenant un théorème puisqu'elle a été démontré en 2013.

Qu'en est-il des sommes de nombres palindromes ?

Est-ce que tout nombre est somme de deux nombres palindromes ?

(b) Est-ce que tout nombre est somme de trois nombres palindromes ?

(Essayez pour 20 nombres pris au hasard)

Etc.

(c) Formuler une conjecture.