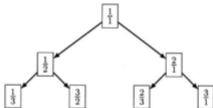


Sujet 2 : Généalogie fractionnaire

Soient a et b deux entiers strictement positifs. On appelle *fil*s de la fraction $\frac{a}{b}$ les fractions $\frac{a}{a+b}$ (appelée *fil gauche*) et $\frac{a+b}{b}$ (appelée *fil droit*).



Considérons la fraction $\frac{1}{1}$ ses fils sont $\frac{1}{2}$ et $\frac{2}{1}$. La fraction $\frac{1}{2}$ a elle même deux fils ; $\frac{1}{3}$ et $\frac{3}{2}$. On obtient ainsi un arbre :



1. Prolonger et étudier cet arbre.

Exemple : on se donne une fraction. Fait-elle partie de l'arbre ? Sur quelle ligne ?

2. On considère la suite (u_n) obtenue en listant les fractions de l'arbre ci-dessus de haut en bas et de gauche à droite.

$$u_1 = \frac{1}{1}, \quad u_2 = \frac{1}{2}, \quad u_3 = \frac{2}{1}, \quad u_4 = \frac{1}{3}, \quad u_5 = \frac{3}{2}, \quad \dots$$

Étudier cette suite.

Exemple : pour un entier strictement positif n donné, à quel termes de la suite correspondent ses fils ?