Proposition sujets Club de Maths

1 Lucky Numbers

Dans le jeu *Lucky Numbers*, un sac contient des jetons de 1 à 20 (pour chaque nombre, il y a autant de jetons que joueurs). Le but est de remplir un tableau de taille 4 par 4 (voir la figure 1) avec les deux conditions suivantes :

— Les nombres mis sur une ligne sont strictement croissants de gauche à droite.

— Les nombres mis sur une colonnes sont strictement croissants du haut vers le bas.

Au début, chaque joueur pioche 4 jetons qu'il met sur la diagonale puis, chacun leur tour, les joueurs vont pouvoir :

— Prendre un jeton qui aurait été mis de de côté et le placer.

— Piocher un jeton et soit le placer, soit le mettre de côté.

Quand un joueur place un jeton, il peut soit le mettre dans un emplacement libre, soit remplacer un de ses jetons ; dans les deux cas, il devra respecter les règles vues plus haut.

Figure 1 – Image du jeu *Lucky Number*.

Le but de ce sujet est de comprendre s'il y a des meilleures stratégies que d'autres. Pour ce faire, nous proposons de commencer par regarder un plateau de 2 par 2 et de se demander quelle la probabilité de le remplir juste en tirant des jetons (on supposera qu'il n'y a que deux joueurs). Ensuite, nous proposons de regarder un plateau de 3 par 3 et de réfléchir, suivant le jeton tiré, quelle sera la position optimale à chaque fois. Enfin, nous pourrons regarder le vrai plateau du jeu. Pour ce dernier, il serait intéressant de coder des stratégies déterministes ou aléatoires et de les faire s'affronter.

2 Le défi des déménageurs

Un camion d'une capacité $100 \times 20 \times 1$ est initialement rempli avec des cartons, tous identiques, de taille $1 \times 1 \times 1$. Deux déménageurs devant le vider se lancent un défi : celui qui décharge le dernier carton (celui en bas au fond du camion) a perdu. Ils déchargent les cartons les uns après les autres en commençant par celui du haut à l'entrée du camion. Par contre, pour éviter de faire tomber des cartons, leur patron leur impose à chaque fois de prendre uniquement des cartons disposés en rectangles (c'est à dire des blocs $a \times b \times 1$). Quelle est la stratégie à adopter pour gagner ? Que se passe-t-il si on change la taille du camion ? Si on met une limite sur a et b ? Si on peut prendre des carrés de cartons n'importe où ? Et si on rajoute une dimension ?

3 L'odyssée de la fourmi

Une fourmi se promène sur un quadrillage rempli de cases de couleurs blanches et noires. Elle a un comportement très simple :

— Si elle arrive sur une **case blanche**, elle se tourne à **gauche** et avance d'une case.

— Si elle arrive sur une **case noire**, elle se tourne à **droite** et avance d'une case.

A chaque fois qu'elle quitte une case, elle change la couleur de cette dernière (si la case est noire, elle devient blanche et inversement). Étant donné un quadrillage de taille 8×8 et deux carrés de ce quadrillage, est-il (toujours) possible de colorier le quadrillage pour que la fourmi aille d'une des cases vers l'autre ? De plus, est-ce que si la fourmi arrive à aller d'une case à une autre, est-ce qu'elle est toujours capable de faire le chemin inverse ?

Si on laisse se balader la fourmi sans l'arrêter, est-ce qu'elle va toujours revenir aux mêmes endroits ? Est-ce qu'elle va rester dans un espace clos ou contraire s'éloigner toujours plus de son point de départ ?

Et que se passe-t-il si on utilise plus de couleurs et/ou de directions possibles ? Ou si, une fois qu'elle quitte la case, la couleur change aléatoirement ?

4 L'opérateur losange

L'opérateur losange $\diamond$ est défini pour tout a et b entiers par :

$$a \diamond b = a^2 + 3^b.$$

Calculer $(3 \diamond 4) \diamond (1 \diamond 2)$. Est-ce que les parenthèses sont obligatoires ? Ou, autrement dit, est-ce que $(a \diamond b) \diamond c = a \diamond (b \diamond c)$? Est-ce que le nombre obtenu est toujours un entier ? En particulier, que se passe-t-il si a ou b sont négatif ? Est-ce que les nombres obtenus peuvent être premiers ?

Est-ce que les réponses restent les mêmes si on change les valeurs de 2 et 3 par autre chose ?

5 Le charlatan et l'intelligence artificielle

Vous êtes un charlatan qui veut participer à un concours de potions magiques [1] où vous avez à votre disposition un sac contenant deux types d'ingrédients : des ingrédients *explosifs* et des ingrédients *bonus* avec chacun un pouvoir magique numéroté de 1 à 3. Le but est de créer une potion la plus puissante possible (c'est-à-dire avec la plus grande somme des ingrédients magiques) en choisissant judicieusement les ingrédients. Le petit problème est que vous n'avez pas le droit de regarder dans le sac quel ingrédient vous prenez et, comme vous êtes un charlatan, vous ne savez pas faire la différence entre les ingrédients *explosifs* et les ingrédients *bonus*. Vous allez donc devoir les choisir au hasard. Par contre vous savez que, dans votre sac, il y a 10 ingrédients répartis en :

— 4 ingrédients *explosifs* de puissance 1, 2 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

— 1 ingrédient *bonus* de puissance 1, 1 de puissance 2 et 1 de puissance 3.

Il y a trois règles à se souvenir :

1. Cet exercice est une libre adaptation du jeu de société de 2018 appelé *Les charlatans de Belcastel*

1. Vous tirez les ingrédients les uns après les autres et après chaque tirage, vous avez le droit de vous arrêter.
2. Dès que vous sortez un ingrédient du sac, vous devez le mettre dans votre marmite (pas le droit de le remettre discrètement dans le sac et d'en tirer un autre).
3. Si la somme des puissances des ingrédients *explosifs* dépasse strictement 7, votre marmite explose et vous avez perdu.

La question qu'on peut donc se poser est de savoir comment maximiser les chances d'avoir une potion la plus puissante possible. Par exemple, on peut choisir de s'arrêter s'il reste dans le sac au moins un jeton qui peut faire exploser la marmite (par exemple si j'ai déjà tiré les jetons *explosifs* de puissances 3 et 2 et que si je tire un jeton *explosif* de puissance 1, la somme atteint 8) mais, dans ce cas, on risque peut-être d'être trop frileux. On peut aussi décider de s'arrêter lorsque le risque de faire exploser la marmite dépasse 1 chance sur 2 ou lorsque nous avons tiré tous les jetons bonus.

Pour répondre à cette question, nous pouvons commencer par regarder quelles configurations font exploser la marmite ? Quelles sont celles qui donnent la plus grande puissance magique ? Nous pouvons aussi prendre une stratégie et regarder la probabilité d'atteindre la puissance magique magique maximale ou une puissance au moins supérieure à 10 par exemple.

Comme il y a beaucoup de stratégies possibles et que faire tous les calculs peut parfois être complexe, nous pouvons aussi utiliser les principes de l'intelligence artificielle : nous programmons quelques stratégies auxquelles nous pensons et nous les faisons s'affronter un grand nombre de fois pour voir celle(s) qui gagne(nt) le plus souvent. Nous pouvons aussi réfléchir à des stratégies évolutives : nous laissons à l'ordinateur choisir au hasard une stratégie et s'il gagne, faire en sorte qu'il la choisira plus souvent à l'avenir alors que s'il perd, il faudrait qu'il la choisisse moins souvent. Nous pourrons alors observer les stratégies qui fonctionneraient le mieux.

6 Échec et domino

Prenons un échiquier, c'est-à-dire un carré de 64 cases (8 lignes et 8 colonnes), et des dominos qui font la taille de deux cases. Est-il possible de recouvrir totalement l'échiquier avec ces dominos ?

Imaginons maintenant que nous enlevons deux cases situées à deux sommets opposés (en haut à gauche et en bas à droite) et posons nous la même question. Est-ce que la réponse est identique ? Et si on enlève deux cases n'importe où sur l'échiquier ?

De même, que se passe-t-il si on prend des dominos plus gros (par exemple des rectangles de 3 cases par 2) ? Ou alors des formes totalement différentes ? Ou des échiquiers plus originaux ? Est-il possible de savoir *facilement* si on pourra recouvrir la zone complètement ou non ?

7 Lever un crayon

Parmi les figures 2, on peut dessiner certaines en ne levant jamais le crayon, d'autres en levant une ou deux fois le crayon exactement.

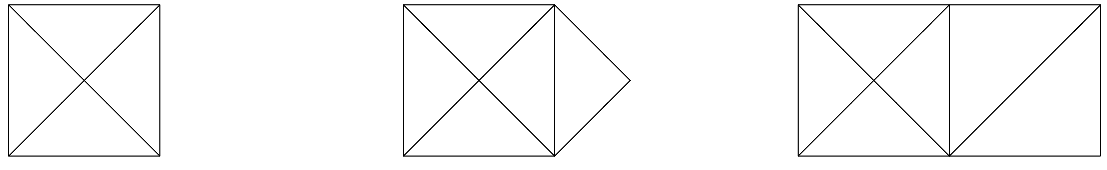

FIGURE 2 – Figure pour l'exercice 7

Comment savoir, au premier regard, combien de fois sera-t-on obligé de lever le crayon pour reproduire une figure ?

8 Pandémie

Une maladie se répand dans le monde de la façon suivante. A chaque instant, nous avons dans l'ordre pour chaque malade :

1. Un malade peut contaminer chaque personne de son entourage avec probabilité p_C
2. Un malade peut guérir tout seul avec probabilité p_G
3. S'il n'est pas guéri, un malade peut mourir avec probabilité p_M

Suivant les différentes valeurs de p_C, p_G et p_M, que va-t-il se passer si les services publiques de santé ne font rien ?
Le gouvernement décide d'agir, il a deux possibilités :

1. Vacciner une partie de la population.
2. Isoler la population en petits groupes.

Suivant différents critères (coût, pertes humaines...), discuter de la qualité de ces méthodes.

9 Produit de nombres

Prenons un nombre entre 10 et 99 (par exemple 77) et multiplions les deux chiffres qui le compose ($7 \times 7 = 49$). Si nous avons encore un nombre entre 10 et 100, nous recommençons jusqu'à n'obtenir qu'un seul chiffre :

$$77 \to 49 \to 36 \to 18 \to 8. \qquad (1)$$

Dans notre exemple, le chiffre 77 mène à 8, on dira alors que 77 est un *antécédent* de 8 et que 8 est la *finalité* de 77 (ici, 8 est également la finalité de 49, 36 et 18). Enfin, on parlera de *chaîne* pour parler de la suite de chiffres obtenue (comme dans le cas de l'équation (1)).

Est-on sûr que que chaque nombre possède une finalité ? Ou est-ce qu'une chaîne peut avoir des nombres qui sont toujours plus grands ? Ou alors, un nombre qui va créer un cycle (c'est-à-dire qu'à un moment, on retombe sur un chiffre déjà présent dans la chaîne) ? Est-ce que tous les chiffres possèdent un antécédent ? Est-ce qu'il y a des chiffres qui reviennent plus souvent que d'autres comme *finalité* ?

Peut-on avoir une idée de la *finalité* d'un nombre au premier coup d'oeil ? Par exemple, les nombres pairs (ou alors impair) sont-ils les antécédents des mêmes chiffres ? Quelles sont les conditions pour obtenir 5 comme finalité ?

Et peut-on généraliser les conclusions précédentes à tous les nombres plus grands que 100 ?