Sujets

proposés par Paul Dorbec pour le collège Villey-Desmeserets

Caen, 2025

1 Inspection des clôtures

Nous sommes dans un espace avec des champs clôturés (par exemple une grille), et nous souhaitons inspecter les clôtures. Pour cela, il est nécessaire de faire le tour des clôtures, en prenant soint de passer de chaque côté de chaque clôture.

Une première solution facile consiste à faire le tour de chaque champ par l'intérieur, puis le tour de l'extérieur. Mais il existe d'autres solutions (qui nécessitent de traverser des clôtures, pourquoi pas !).

Vous trouverez par exemple la solution la plus naturelle ainsi qu'un exemple d'autre solution dans la Figure 1.

FIGURE 1 – Deux façons d'inspecter les clôtures.

Chaque solution est constituée de plusieurs petits circuits, un circuit étant une boucle d'inspection qui revient à son point de départ. On admettra que chaque circuit ne passe qu'une fois par chaque coin (i.e. si un circuit décrit un 8, on le traitera comme deux circuits distincts). On excluera aussi les circuits qui passent par les deux côtés d'une même clôture.

En bon mathématicien, on aimerait savoir combien de solutions existent pour les différentes configuration de champs (tailles de grille). On pourra aussi détailler le nombre d'inspection en fonction du nombre de clôtures qu'il a fallu traverser. On voit que la solution de droite ci-dessus implique de traverser quatre clôtures. Combien de solutions existe-t-il qui traversent 4 clôtures ? Existe-t-il des solutions qui ne traversent que deux clôtures ?

2 Des échelles dans les montagnes

On étudie dans ce problème des montagnes un peu particulières. Pour un nombre donné n, une montagne est un mélange des nombres entre 1 et n, correspondant aux altitudes successives. On considèrera toujours un début et une fin de montagne à l'altitude 0. Dans la Figure 2, vous trouverez un exemple d'une montagne munie d'échelles.

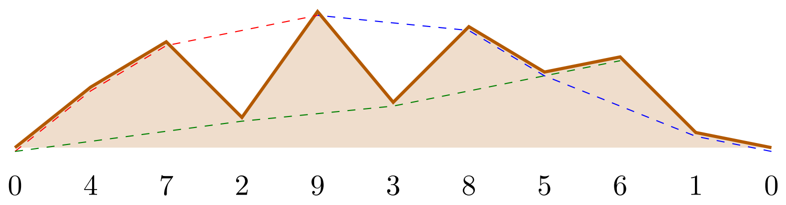

Figure 2 – Un exemple de montagne et trois échelles.

Une échelle est un ensemble de points de la montagne qui évoluent toujours dans le même sens (soit en montant, soit en descendant). Sur la figure, deux échelles montantes (rouge et verte) et une échelle descendante sont représentées. L'échelle rouge comporte 3 segments, les échelles verte et bleue 4 segments.

On s'intéresse aux longueurs des échelles dans les montagnes, en fonction du nombre de points n. Vous verrez bien qu'il y a des montagnes qui permettent des échelles très longues. Mais quelle montagne minimise la plus longue échelle ? Y a-t-il des montagnes dont la plus longue échelle ne monte pas jusqu'au sommet ? Quid si on s'intéresse uniquement à des échelles contiguës ?

3 Plantes invasives

Dans une grille (à cases carrées, hexagonales, triangulaires...), on souhaite planter des espèces végétales. Mais la nature invasive de ces espèces impose des contraintes dans les espèces utilisées.

Pour la première espèce que nous souhaitons planter, il est nécessaire d'éviter de planter cette même plante dans deux cases voisines. Autrement dit, tout chemin entre deux cases comportant cette plante devra traverser au moins une case plantée d'une autre plante. La seconde espèce demandera un peu plus de précaution, il faudra pour rejoindre deux cases plantées de cette espèce traverser au moins deux cases où poussent d'autres plantes. La troisième espèce est encore plus contraignante, puisqu'il faudra espacer les plants d'au moins 3 cases. Ainsi de suite, la $k$ième espèce nécessitant un espacement d'au moins k cases.

Selon les dimensions et la forme de la grille, combien d'espèces faudra-t-il mobiliser pour végétaliser toute la grille ? Bien évidemment, on souhaite éviter de planter de trop nombreuses variétés différentes, car bien que cela soit bon pour la bio-diversité, l'entretien devient alors trop compliqué.

4 Dessins et croisements

Dans ce problème, on étudie des dessins de mathématicien. Du point de vue du mathématicien, un dessin est un ensemble de points (•) et des traits qui relient ces points. Par exemple, voici une magnifique maison, représentée avec 5 points, et quelques variations sur le thème :

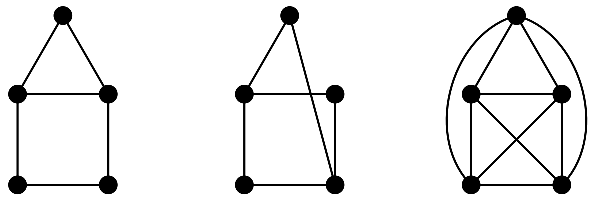

FIGURE 3 – Une maison, une maison déformée, et une maison qui ne peut être dessinée sans croisement.

Dans notre vision, un seul trait peut relier deux même points, et les traits peuvent se croiser sans problème, sans pour autant former un nouveau point.

Supposons cependant que nous essayons de limiter les croisements dans le dessin. Pour un nombre c de croisements, quel est le plus grand nombre de traits que l'on puisse dessiner tout en limitant le nombre de croisement à au plus c ?

On pourra aussi s'intéresser à des dessins qui interdisent un schéma. Par exemple, le schéma le plus simple consiste en trois points • tous reliés deux à deux (un parcours utilisant trois traits et qui revient au point de départ, ce qu'on pourrait appeler un triangle). Ainsi, dans la figure ci-dessus, la maison ne satisfait pas la contrainte, mais la maison déformée la satisfait (les triangles formés via l'intersection des deux traits ne relient pas trois points •). Quel est le plus grand nombre de traits que l'on peut dessiner dans une figure ayant un nombre de points donné sans avoir un triangle ?

On pourra enfin se poser la même question si l'on interdit une autre forme, par exemple quatre points reliés selon un cycle ? quatre points tous reliés deux à deux ?

Bonnes recherches !