

3 sujets pour MATH.en.JEANS

Emmanuel Militon

Variantes sur le jeu de Nim

Pour celles et ceux qui aiment jouer à des jeux auxquels on est sûr de gagner.

Le jeu de Nim se joue à deux joueurs de la manière suivante. On dispose 30 allumettes cotes à cotes. Chacun son tour, chaque joueur prend une, deux ou trois allumettes. Le joueur qui prend la dernière allumette a perdu la partie.

Il existe une stratégie gagnante pour l'un des deux joueurs. La trouverez-vous? Que se passe-t-il si l'on change le nombre d'allumettes ou si l'on autorise chaque joueur à prendre plus d'allumettes à chaque coup.

On pourra explorer d'autres variantes de ce jeu.

Première variante : on dispose quatre rangées de 30 allumettes et chaque joueur ne peut prendre des allumettes que dans une rangée. Que se passe-t-il si on change le nombre d'allumettes dans chaque rangée, avec éventuellement des nombres différents d'allumettes dans chaque rangée? Que se passe-t-il si on modifie en plus le nombre de rangées?

Deuxième variante : On dispose les allumettes en carré et, à chaque coup, un joueur ne peut prendre que des allumettes consécutives d'une même ligne ou d'une même colonne.

Vous pouvez également inventer vos propres règles.

3 Évolution d'une population, le modèle logistique

Enfin un sujet qui sert à quelque chose !

Dans un environnement à ressources limitées, l'évolution d'une population animale (ou de cellules, de bactéries, etc...) peut être modélisée de la manière suivante. La population lors de l'année n sera représentée par un nombre réel $x_n \in [0, 1]$, qui est le rapport entre la population lors de l'année n et la population maximale possible dans cet environnement.

Le modèle logistique prévoit alors que la population lors de l'année $n + 1$ sera alors

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n).$$

L'idée du modèle est que, plus la population lors de l'année n est grande, plus elle sera apte à se reproduire, d'où le facteur x_n . Néanmoins, si la population est trop importante, les ressources viendront à manquer pour entretenir la population, ce qui explique le facteur $1 - x$.

Dans quels cas la population va rester exactement la même chaque année? Peut-on trouver d'autres cas où la population sera la même tous les deux ans? tous les 3 ans? Même question en remplaçant 2 et 3 par d'autres nombres. Y a-t-il des cas où, à l'inverse, la population n'est jamais la même d'année en année?

Dans quels cas la population va-t-elle s'éteindre (c'est-à-dire que la suite (x_n) va tendre vers 0)?

Quelle est la population moyenne maximale que l'on peut obtenir sur un grand nombre d'années?