

# Sujet 1 : Hippo et Hippa

MATHs.en.Jeans 2017-2018

Erwan Kerrien

Hippo(crate de Chio)<sup>1</sup> et Hippa(se de Métaponte)<sup>2</sup> sont pythagoriciens. Et chez les pythagoriciens, ça ne se discute pas, «tout est nombre» ! Et les seuls vrais nombres sont les nombres entiers<sup>3</sup>. En particulier les longueurs, que ce soit les tailles de segments dans les figures géométriques ou les longueurs des cordes d'une cythare, sont dans des rapports de nombres entiers. On dit qu'elles sont commensurables, et on dirait aujourd'hui que ce rapport est un nombre rationnel. Par exemple, si une longueur  $A$  est en rapport  $\frac{3}{4}$  avec la longueur  $B$ , alors  $A = \frac{3}{4}B$ , soit  $4A = 3B$  : en prenant 4  $A$ , on obtient la même mesure qu'en prenant 3  $B$ .

Mais Hippa a découvert quelque chose. Une chose terrible, horrible, impensable puisque contraire à la doctrine du Maître : la diagonale d'un carré est incommensurable avec son côté<sup>4</sup> ! Et il peut le démontrer !

Il va voir son copain Hippo<sup>5</sup> et lui fait le dessin de la figure 1 puis lui expose sa démonstration. Hippo,

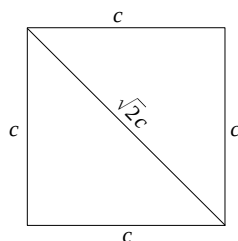


FIGURE 1 – Le rapport de la diagonale d'un carré à son côté vaut  $\sqrt{2}$ .

comme a son habitude, a le regard vide de celui qui ne comprend rien et pense à son prochain repas. Il hoche la tête puis s'éloigne.

Hippa n'en dort plus, il ne mange plus, son cerveau est en ébullition, tentant par tous les moyens de trouver la faille qui doit se loger dans sa démonstration. Comment pourrait-il en être autrement ?

Quelques jours plus tard, Hippo, le sourire aux lèvres, une feuille de salade encore coincée entre les dents<sup>6</sup> s'approche d'Hippa, dont les cernes se creusent et la peau pâlit chaque jour un peu plus et lui pose la main sur l'épaule. «J'ai trouvé comment écrire ton rapport avec des vrais nombres (entiers donc). Tu peux l'écrire comme ça»

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \frac{1}{2 + \dots}}}$$

Hippa regarde Hippo. Hippo se demande où il a mis la pomme qu'il avait gardé pour son goûter. Hippa sourit : Hippo a raison ! Mais aussitôt se renfrogne : que vaut-il mieux accepter ? L'incommensurabilité ou l'infini ?

1. Excellent géomètre, et précurseur d'Euclide, dont Aristote a dit qu'il était «bon géomètre, inepte et ridicule en tout le reste»

2. Dont on connaît peu de choses, si ce n'est qu'il fut sans doute un dirigeant pythagoricien, mais deux légendes s'attachent à son nom. L'une dit qu'il aurait été exclus de l'école de Pythagore pour en avoir divulgué la doctrine sacrée, et l'autre qu'il aurait découvert l'incommensurabilité de certaines quantités, dont  $\sqrt{2}$  ... et aurait été tué pour cela, jeté par-dessus bord lors d'un voyage en bateau.

3. Et Pythagore (de Samos) ne pouvait pas raconter de bêtise : il en était à sa 23<sup>e</sup> réincarnation et il se souvenait parfaitement de toutes ses vies antérieures (enfin, c'est ce qu'il disait...)

4. Ouais, je sais, ça vous épate.

5. Hippocrate de Chio vivait au V<sup>e</sup> siècle avant J.-C. et Hippase de Métaponte au VI<sup>e</sup> siècle avant J.-C.. Ils ne sont donc pas contemporains et le présent texte est une fable à destination des jeunes mathématiciens que vous êtes.

6. Les pythagoriciens étaient végétariens.

### Questions

Je vous demande de répondre aux questions suivantes.

- Démontrez que  $\sqrt{2}$  est irrationnel (indice : on peut procéder par l'absurde).
- Démontrez qu'Hippo a raison
- Quelle forme prend une expression de la forme ( $a$  est un entier)

$$a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \frac{1}{a + \dots}}}$$

- peut-on écrire tout nombre réel de cette manière ? Peut-on généraliser l'expression précédente pour le faire ?