

1 Labyrinthes

Nous allons compter le nombre de *labyrinthes* qu'on peut dessiner sur une grille donnée.

Un *labyrinthe* sur une grille $m \times n$ est une ligne brisée continue formée d'arêtes horizontales ou verticales (reliant chacune des sommets adjacents de la grille) partant du coin en haut à gauche, terminant au coin en bas à droite et passant une fois et une seule par chaque sommet de la grille. Remarque : il n'est pas très difficile de sortir d'un tel labyrinthe : on utilise ce terme pour l'analogie visuelle ; le terme technique adéquat serait plutôt : *chemin couvrant*.

- Est-il toujours possible de dessiner un labyrinthe sur une grille donnée ? Quel est le nombre de labyrinthes qu'on peut dessiner sur une grille de taille 3×3 ? De taille 2×100 ? De taille 3×100 ? De taille 100×100 ? Et si on modifiait la forme de la grille ?
- Peut-on trouver un algorithme pour faire dessiner un tel labyrinthe à un ordinateur ? Comment éviter d'être bloqué après un certain nombre de pas ? Etant donné un labyrinthe, comment le modifier un peu (localement) pour en obtenir un différent ?
- On se donne un échiquier de taille $m \times n$ et des dominos pouvant recouvrir chacun deux cases (contigües) de l'échiquier. De combien de manières différentes peut-on recouvrir l'échiquier avec ces dominos ? Peut-on établir un lien entre ce problème et celui des labyrinthes ?

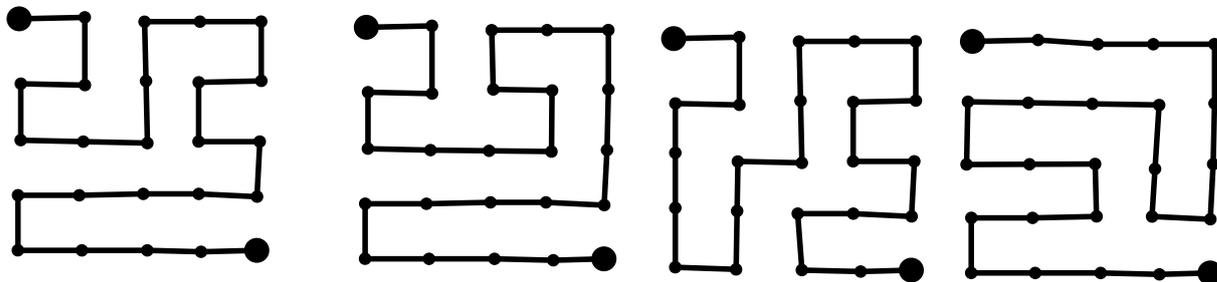


FIGURE 1 – Quatre exemples de *labyrinthes* de la grille 5×5