

Seul sur le cercle

Sujet MATH.en.JEANS n°1

Les Gumps sont des êtres très sportifs, et ils aiment courir. Mais ils sont aussi très timides et ne sont donc à l'aise que lorsqu'ils sont seuls. Leur bonheur est même proportionnel à la distance au plus proche Grump.

Tous les matins, F. Gump sort donc pour courir sur la piste la plus proche de chez lui. Cette piste est circulaire et fait 400m. Il espère, jour après jour, qu'il aura la bonne surprise d'y être seul. Seulement, voilà, cet événement béni est extrêmement rare et, le plus souvent, d'autres Gumps courent en même temps que lui sur la piste.

Son amour du sport pousse F. Gump au compromis : il estime que sa séance de course sera suffisamment satisfaisante si, à un moment donné au moins, il se retrouvera à une distance d'au moins $400/N$ m de tous les autres Gumps, où N est le nombre de Gumps qui courent (y compris lui).

La question est simple : est-ce que F. Gump va courir ?

On suppose que tous les Gumps (y compris F.) courent à des vitesses strictement différentes. Ils ne sont pas obligés de courir tous dans le même sens de rotation. On pourra commencer avec 2 Gumps, puis 3, ... 7... plus ?

Et voici quelques questions complémentaires que vous pourrez vous poser :

- Que se passe-t-il si au moins 2 Gumps ont la même vitesse et courent dans le même sens ? Et notamment si un Gump court à la même vitesse et dans le même sens que F. ?
- En se posant la question du temps de course, existe-t-il des cas où les positions des Gumps sont de répétent à un temps régulier (sont périodiques) ?
- Question un peu différente, si F. est heureux à un moment donné, le sera-t-il forcément de manière répétée ? Et si oui, peut-on savoir à quelle fréquence ?
- Quelle est la distance maximale que F. pourra avoir avec les autres Gumps qui courent ? Quelle est la distance minimale ?
- Le bonheur de F. Gump étant proportionnel à la distance aux autres Gumps, est-il possible d'estimer son niveau de bonheur moyen sur une course (100 % quand il est seul sur la piste) ?