

# Un tournoi de baby-foot parfait



Il s'agit d'une question posée par Pierluigi, passionné de baby-foot, qui souhaite organiser un tournoi pour ses amis.

## Règles du tournoi

1. Chaque équipe est composée d'un **défenseur** et d'un **attaquant**.
2. Un défenseur reste toujours défenseur et un attaquant reste toujours attaquant.
3. Aucun joueur ne doit jouer deux fois avec le même coéquipier.
4. Tous les joueurs participent à chaque tour.
5. Il y a un total de  $N$  matchs joués en simultané.
6. À l'issue des  $T$  tours, le titre de champion est décerné à l'attaquant et au défenseur ayant remporté le plus grand nombre de matchs.

L'objectif est d'organiser le tournoi de manière à ce que chaque joueur rencontre le plus grand nombre possible de **coéquipiers** et d'**adversaires** différents.

En cas d'égalité dans la règle 6, il convient de définir un critère de départage équitable.

Votre mission est d'aider Pierluigi à trouver la meilleure manière d'organiser son tournoi.

Il doit notamment décider :

- combien de joueurs inviter,
- combien de tours prévoir,
- et comment construire un tableau de matchs équilibré.

## D'abord: Tournoi a deux joueurs par table...

Commençons par une situation plus simple afin de mieux comprendre le problème.

Supposons que le tournoi se déroule avec seulement *deux joueurs* par table. Chaque joueur joue donc à la fois en attaque et en défense.

Bien entendu, il faut un nombre pair de joueurs pour que chacun puisse participer à chaque tour.

- Combien de tours au maximum peut-on organiser avec 4 joueurs, si l'on veut éviter que les affrontements se répètent ?
- Et avec 6 joueurs ?
- Plus généralement, avec  $2 \times N$  joueurs ?

### De retour au tournoi avec attaquants/défenseurs...

La question se complique un peu. On peut déjà commencer par se demander s'il est possible d'organiser *deux tours*!

Pierluigi aimerait savoir combien de joueurs il doit inviter au minimum afin de garantir qu'aucun joueur ne rencontre deux fois le même joueur — ni comme coéquipier, ni comme adversaire — dans un tournoi de 2 tours.

Et qu'en est-il pour un tournoi en 3 tours ?

### Appariements parfaits et de bonne qualité

Un **appariement** est une liste de matchs indiquant la composition des équipes et leurs adversaires à chaque tour. Un appariement est dit **valable** s'il respecte les règles 1 à 4 listés ci-dessus.

*Exemple*: Supposons un tournoi de 2 tours avec 8 joueurs :

- **Attaquants** : Pierre, Maria, Robert, Emmanuel, Louise
- **Défenseurs** : Lucca, Lucy, Paul, Martin

Un appariement valable est :

**1er tour .**

- Pierre – Lucca vs Maria – Lucy
- Emmanuel – Paul vs Louise – Martin

**2e tour .**

- Pierre – Lucy vs Maria – Lucca
- Emmanuel – Martin vs Louise – Paul

À chaque appariement, on associe un **score de qualité** défini comme suit :

- Pour chaque joueur, on compte le nombre de fois où il retrouve un même joueur (comme adversaire ou comme coéquipier) au cours du tournoi.
- On additionne ensuite ces nombres pour l'ensemble des joueurs.

**Exemple** : dans l'appariement ci-dessus, chaque joueur recroise trois adversaires différents une fois chacun. Le score de qualité est donc :

$$8 \times 3 \times 1 = 24.$$

Plus le score est faible, meilleur est l'appariement.

Un appariement est dit **parfait** si son score est nul.

**Question:** Peut-on lister tous les appariements possibles avec 8 joueurs et 2 tours, en calculant chaque fois le score de qualité ?

**Exemple:** Voici un appariement parfait à deux tours, avec 16 joueurs (8 attaquants et 8 défenseurs)

Tour	Match	Teams
1	1	$(A_1, D_1)$ vs. $(A_2, D_2)$
	2	$(A_3, D_3)$ vs. $(A_4, D_4)$
	3	$(A_5, D_5)$ vs. $(A_6, D_6)$
	4	$(A_7, D_7)$ vs. $(A_8, D_8)$
2	1	$(A_1, D_6)$ vs. $(A_3, D_8)$
	2	$(A_2, D_5)$ vs. $(A_4, D_7)$
	3	$(A_5, D_1)$ vs. $(A_7, D_3)$
	4	$(A_6, D_2)$ vs. $(A_8, D_4)$

**Question:** Quel est le meilleur score de qualité possible pour un tournoi à  $4N$  joueurs et  $T$  tours?