

Sujet 2 : approximation de racines par des polynômes

Pascal Maillard

Maths en Jeans à Marciac 2025/2026

Comment exprimer $\sqrt{2}$? Une méthode est d'approximer la fonction $x \mapsto \sqrt{x}$ par des polynômes et que nous allons étudier ici. Ce n'est pas la méthode la plus rapide mais elle mène à des formules très surprenantes!

On commence par essayer d'approcher $x \mapsto \sqrt{1+x}$ par un polynôme quand x est suffisamment petit (et possiblement négatif). Commençons par l'approcher par un polynôme de degré 1. On suppose alors qu'il existe a et b tels que $\sqrt{1+x} = a + bx + R$, où R est un reste beaucoup plus petit que x quand x est petit. En posant $x = 0$, on obtient $a = 1$. Trouvons b . Par définition, $\sqrt{1+x}$ est le nombre qui, au carré, est égal à $1+x$, élevons alors tout au carré. On obtient :

$$1+x = (1+bx+R)^2 = 1+2bx+b^2x^2+2(1+bx)R+R^2$$

Quand x est petit, le terme en x^2 et les termes avec R sont beaucoup plus petits que x . Donc si on veut que les deux côtés soient les mêmes pour tout x suffisamment petit, il faut que $2b = 1$ et donc $b = 1/2$. On stipule alors que

$$\sqrt{1+x} = 1 + x/2 + R,$$

avec R un reste, beaucoup plus petit que x pour x petit.

1. Obtenir des approximations avec des polynômes de degrés supérieurs. Vérifier l'efficacité de l'approximation en traçant les fonctions (voir Figure 1) ou en calculant certaines valeurs. Essayer des valeurs de x grandes, ou encore $x = 1$ ou $x = -1$.
2. Obtenir des formules d'approximation pour $\sqrt{c+x}$ pour $c > 0$ arbitraire. Obtenir des approximations pour $\sqrt{10}$, $\sqrt{8}$. Obtenir des approximations pour $\sqrt{2}$ de différentes façons.
3. On pourra essayer d'obtenir une formule qui donne une approximation de $\sqrt{1+x}$ par un polynôme de degré n quelconque. On pourra également essayer de voir si d'autres fonctions peuvent également s'approcher par des polynômes. Exemple : la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x}$.

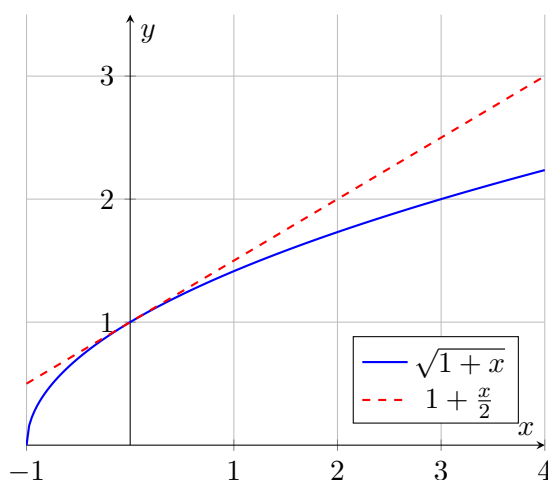


FIGURE 1 – Approximation de $\sqrt{1+x}$ par une fonction linéaire.