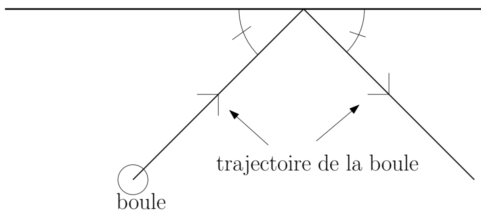
4 sujets pour MATh.en.JEANS

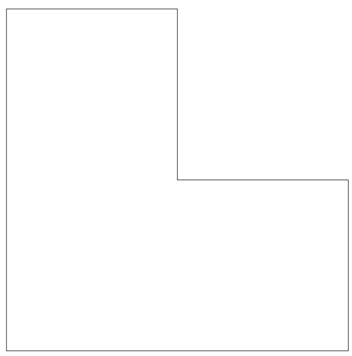
Emmanuel Militon

1 Billard

Dans ce sujet, on va jouer au billard sur un billard rectangulaire sans aucune poche pour récupérer les boules. On suppose par ailleurs que, lorsqu'une boule rebondit sur une paroi du rectangle, l'angle incident est égal à l'angle réfléchi, comme sur le dessin ci-dessous.



Par ailleurs, on suppose qu'il n'y a pas de frottement : une boule tirée ne s'arrête jamais. Y a-t-il des trajectoires de boules qui reviennent exactement à leur position de départ ? Si oui, quelles sont ces trajectoires ? Même question en considérant le billard en forme de L ci-dessous.



2 Échec et cavalier

On considère un plateau de jeu d'échec sur lequel il y a seulement un cavalier. Peut-on trouver une trajectoire du cavalier de sorte qu'il visite toutes les positions de l'échiquier exactement une fois ? Même question en changeant le nombre de cases de l'échiquier et la forme de l'échiquier.

3 Propagation d'une épidémie

On veut étudier la propagation d'une épidémie au sein d'une population humaine. L'épidémie commence au jour 0. On va note S_n, I_n et G_n les proportions de la population respectivement d'individus sains jamais infectés, d'individus infectés par la maladie et d'individus guéris. On suppose qu'un individu guéri a obtenu une immunité qui l'empêche d'être infecté à nouveau. Comme l'épidémie commence au jour 0, on suppose que $G_0 = 0$. Comme S_n, I_n et G_n sont des proportions, $S_n + I_n + G_n = 1$ pour chaque jour n.

Le modèle est le suivant et dépend de coefficients $0 \leq c \leq 1$ et $0 \leq b \leq 1$.

$$\left\{ \begin{array}{rcl} I_{n+1} & = & (1-c)I_n + bI_nS_n \\ S_{n+1} & = & S_n - bI_nS_n \\ G_{n+1} & = & G_n + cI_n. \end{array} \right.$$

La première équation signifie que le nombre d'infecté au jour $n+1$ est égal au nombre d'infecté au jour n moins le nombre d'individus nouvellement rétablis (représentés par cI_n) plus le nombre d'individus nouvellement infectés (représentés par bI_nS_n). La deuxième équation signifie que le nombre d'individus sain au jour $n+1$ est égal au nombre d'individus sains au jour n moins le nombre d'individus nouvellement infectés. La dernière équation signifie que le nombre d'individus guéris au jour $n+1$ est égal au nombre d'individus guéris au jour n plus le nombre d'individus nouvellement guéris.

Quels sont les influences des paramètres b et c sur le modèle ? On pourra commencer par étudier les cas où $b = 0$ et où $c = 0$.

4 Mélanger une pâte à pain

On veut fabriquer une machine pour mélanger/pétrir une pâte à pain et le but est d'avoir une machine qui mélange bien. Pour simplifier le problème on représente la pâte à pain comme un carré dans le plan de côté 1.

On veut tenter le processus suivant (voir le dessin ci-dessous). On commence par aplatir le carré pour en faire un rectangle de largeur 1/2 et de longueur 2 (on multiplie les abscisses par 2 et les ordonnées par 1/2). Ensuite on découpe le rectangle au milieu en deux rectangles de largeur 1/2 et de longueur 1 puis on pose le rectangle de droite au dessus du rectangle de gauche pour former de nouveau un carré de côté 1. On répète ensuite l'opération.

Pour savoir si ce processus mélange bien, on va tenter de répondre à la question suivante. On se donne un carré de pâte à pain P de côté 1/16ième (par exemple celui qui au début est $[0, 1/16] \times [0, 1/16]$) et un carré fixé C de côté 1/16ème dans le carré unité (par exemple $[15/16, 1] \times [15/16, 1]$). Est-ce que, après un certain nombre de mouvements, P va rencontrer le carré C. Si oui, au bout de combien de mouvements ? Que se passe-t-il si on prend d'autres carrés ? si on prend des carrés plus petits ?