Une machine d'humeur très changeante

Année 2013-2014

Donovan Cassat, Loïc Djebar, Léa Mordant, Antoine Torremocha, élèves de 1ère S

Etablissement : Lycée Jean Lurçat - Perpignan

Professeur : Martine Vergnac, Lycée Jean Lurçat, Perpignan.

Chercheur : Robert Brouzet, Université Perpignan Via Domitia, Lamps.

Le sujet :

Vous introduisez dans une machine un nombre entre 0 et 1 et réglez un curseur sur une valeur entre 0 et 4. La machine transforme alors votre nombre de la manière suivante : elle lui soustrait son carré, multiplie le résultat par la valeur indiquée par le curseur, affiche le résultat, puis recommence avec cette nouvelle valeur et poursuit ainsi indéfiniment. Quelle est l'influence des valeurs choisies au départ sur le comportement des résultats affichés ?

Pour tenter de comprendre le sujet, nous avons pris un exemple :

x représente un nombre aléatoire en 0 et 1.
a représente le curseur compris entre 0 et 4.

On calcule les 4 premières valeurs données par la machine si l'on introduit :

x= 0,4 a = 1

1ère valeur : $1 (0{,}4 – 0{,}4^2) = 0{,}24$

2ème valeur : $1 (0{,}24 – 0{,}24^2) = 0{,}1824$

3ème valeur : $1 (0{,}1824 – 0{,}1824^2) = 0{,}14913024$

4ème valeur : $1 (0{,}14913024 – 0{,}14913024^2) = 0{,}126890411517542$

Ensuite, nous nous sommes rendus compte que ce processus pouvait être modélisé par une suite, car pour passer au terme suivant on a besoin du terme précédent.

Une suite est une «succession» de nombres. Ces nombres sont les termes de la suite. Une suite (U(n)) associe, à tout entier n, un nombre noté U(n) et appelé le terme général de la suite. (U(n)) est une fonction de n, n est appelé l'indice ou le rang.

Nous avons traduit le problème ainsi : on pose U(n) le terme obtenu après n fois la procédure de la machine.
La suite est alors définie par : $U(n+1) = a\,(U(n) - (U(n))^2)$

Nous avons ensuite tenté de trouver une méthode nous permettant de calculer la limite de cette suite lorsqu'elle existe, en fonction des valeurs de départ.

Nous avons donc cherché s'il existait une propriété de la limite et nous avons trouvé que sous certaines conditions, lorsque $\lim(U(n)) = \ell$, alors ℓ doit vérifier :

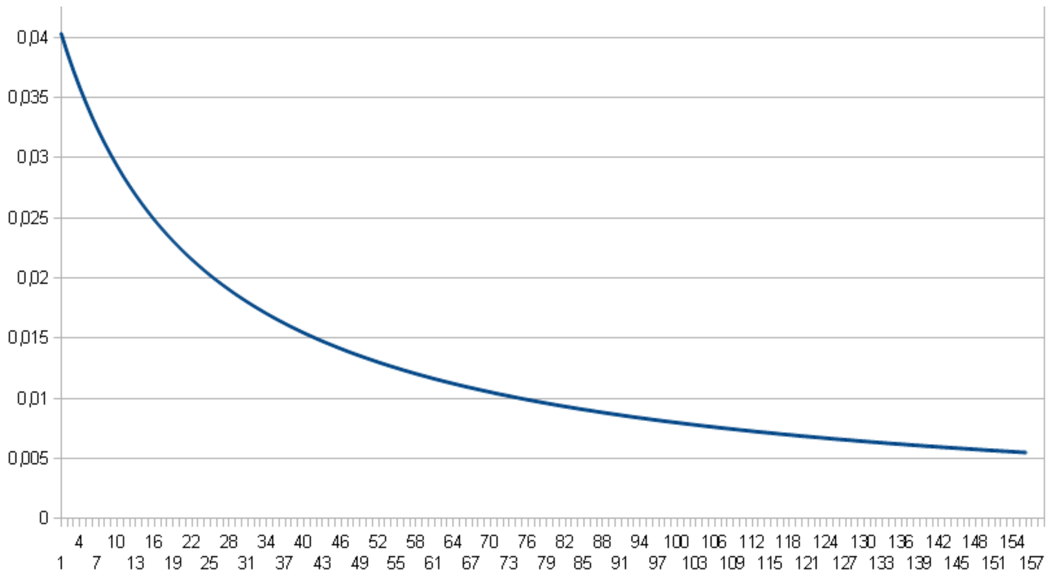
$$\ell = a\,(\ell - \ell^2)$$
$$\ell = a\,\ell - a\,\ell^2$$
$$\ell - a\,\ell + a\,\ell^2 = 0$$
$$\ell\,(1 - a + a\,\ell) = 0 \qquad (1)$$
$$\ell = 0 \text{ ou } \ell = (a-1)/a$$

Pour essayer de comprendre les variations de cette suite, nous avons construit des graphiques avec le tableur que nous avons ensuite essayé d'interpreter.

<u>1) Partie 1</u>

Dans un premier temps, nous avons observé le comportement de la suite pour des valeurs entières du curseur et nous illustrons ci-dessous chacun des cas par un exemple graphique.

<u>Lorsque a=1 :</u>



Suite (U(n)) pour a = 1 et x = 0,04. En abscisse : n. En ordonnée : U(n).

Pour démontrer ce cas, nous avons utilisé le théorème suivant : *Une suite décroissante et minorée tend vers une limite l.*

la suite (U(n)) est :
• croissante si et seulement si pour tout n, $U(n+1) \geq U(n)$;
• décroissante si et seulement si pour tout n, $U(n+1) \leq U(n)$;

<u>Si le curseur (a) = 1 :</u>

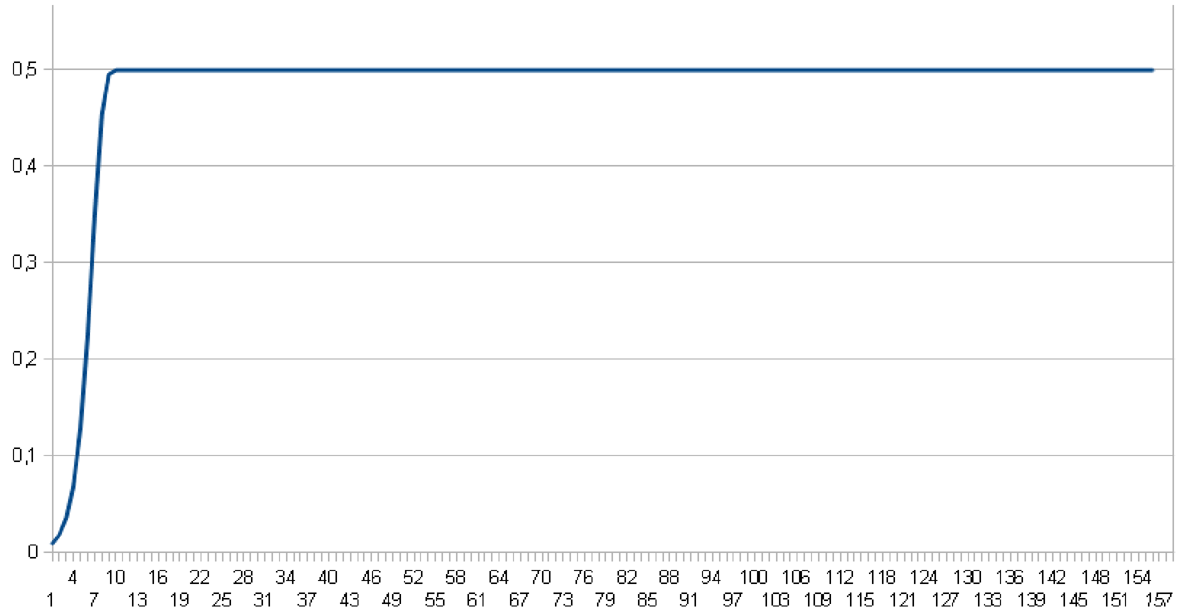
$U(n+1) = 1\ (\ U(n) - (U(n))^2\ )$
$U(n+1) = U(n) - (U(n))^2$
donc $U(n+1) - U(n) = -\ (U(n))^2$

$-\ (U(n))^2 \leq 0$ donc la suite (U(n)) est décroissante et comme de plus elle est minorée par 0 alors elle converge vers ℓ, ℓ appartient [0;1].
D'après le paragraphe précédant, on sait que ℓ doit vérifier

$$\ell = \ell - \ell^2$$
$$\ell = 0$$

Conclusion: lim(U(n)) = 0 pour curseur (a) = 1

<u>Lorsque a=2 :</u>

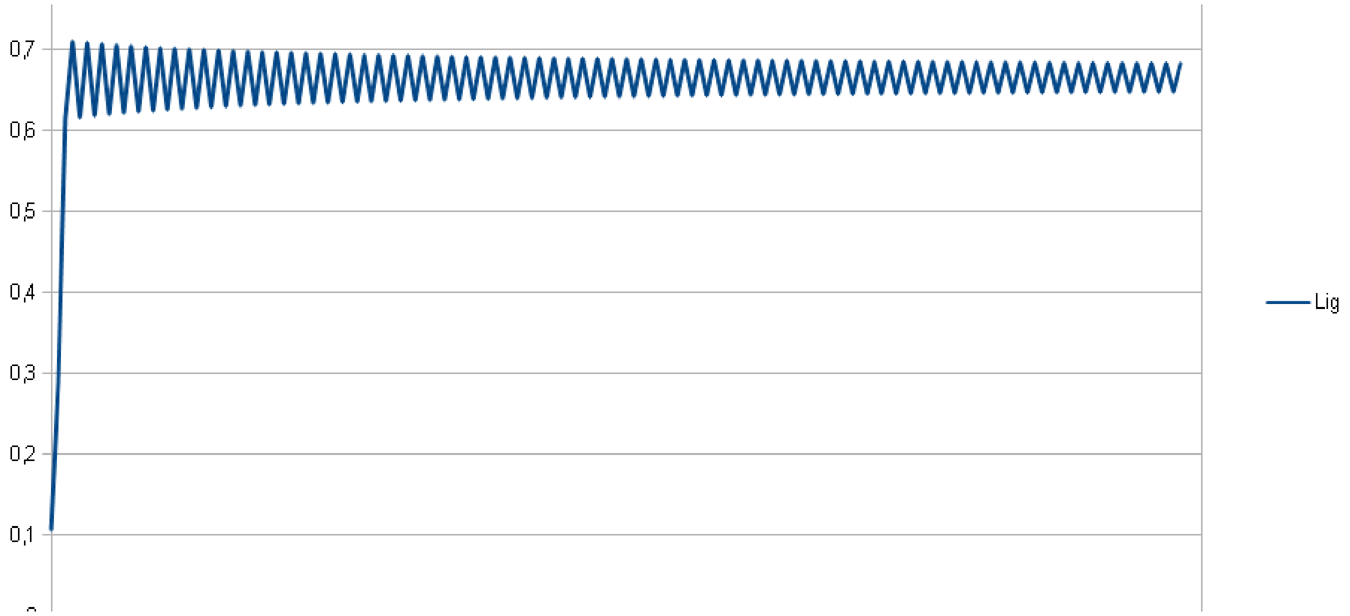


Suite (U(n)) pour a = 2 et x = 0,01. En abscisse : n. En ordonnée : U(n).

On peut conjecturer que quelque soit la valeur de x, quand a = 2 la suite tend vers 0,5.

Si la limite existe, alors elle doit vérifier :
$\ell = (a - 1) / a$ donc $\ell = (\ 2 - 1\ ) / 2 = ½ = 0{,}5$ ce qui correspond à nos résultats expérimentaux.

Lorsque a=3 :

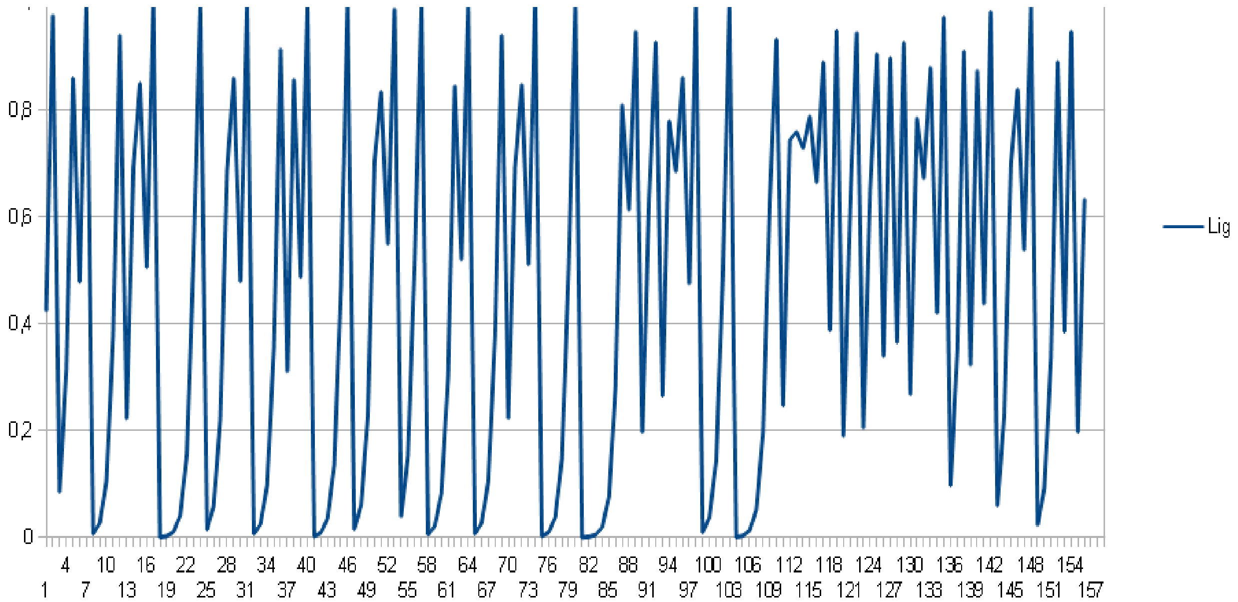


Suite (U(n)) pour a = 3 et x = 0,1. En abscisse : n. En ordonnée : U(n).

On peut conjecturer que quand a = 3, les valeurs oscillent sur l'intervalle dont une approximation graphique serait]0,55 ; 0,75[

D'après le résultat démontré page 2:
Soit $\ell = 0$
Soit $\ell = (a-1) / a$ donc $\ell = (3-1) /3 = 2/3$ cela semble correspondre car 2/3 appartient à l'intervalle]0,55 ; 0,75[
Les graphiques que nous avons obtenus ne nous permettent de conclure réellement. Il semble que la suite ne converge pas vers une limite, mais avec un plus grand nombre de valeurs, on ne peut pas exclure la possibilité que cette suite converge.

Lorsque a=4 :



Suite (U(n)) pour a = 1 et x = 0,04. En abscisse : n. En ordonnée : U(n).

On conjecture que lorsque a = 4, les valeurs obtenues oscillent entre 0 et 1.

$\ell = (a - 1) / a$ donc $\ell = (4 - 1) / 4 = ¾$, si cette suite devait converger elle convergerait vers ¾. Mais on remarque que ceci est contredit par tous les exemples que nous avons testés, comme celui illustré dans le graphique ci-dessus.

2) Partie 2

Dans un deuxième temps, nous avons observé le comportement de la suite pour des valeurs quelconques du curseur en prenant pour la valeur a dans le tableur 4*alea().

En étudiant de manière expérimentale cette suite, nous avons conjecturé que la suite semble tendre vers un nombre réel lorsque a est inférieur à environ 2,87 et qu'elle n'a pas de limite quand a est supérieur à environ 2,87.

De plus quand a < 2,87, la limite semble être définie par a et non par le nombre x choisi entre 0 et 1 au départ.

Par exemple : x = 0,458
a = 2,6
U(300) = 0,615384615384615000000

x = 0,772
a = 2,6
U(300) = 0,615384615384615000000

a = 0,154
a = 2,6
U(300) = 0,615384615384615000000

Ainsi, avec x aléatoire entre 0 et 1, la valeur de U(300) dépend de a.
Cela semble être le cas avec toute les valeurs de la suite qui ont une limite.
Nous n'avons pas réussi à démontrer cette particularité de la suite.

Conclusion :

Ainsi, le comportement des résultats affichés semble seulement être déterminé par la valeur du curseur entre 0 et 4 et non par la valeur de départ choisie aléatoirement entre 0 et 1. Quand a est inférieur à environ 2,87 la suite converge et quand a supérieur à 2,87 la suite ne semble pas avoir de limite. Nous n'avons pas réussi à prouver l'existence de cette valeur de a qui modifie le comportement de la suite: la valeur que nous proposons a été déterminée expérimentalement avec un tableur. Nous conjecturons son existence mais nous n'avons pas pu le démontrer mathématiquement.

Note d'édition
(1) $\ell (1 - a + a \ell) = 0 \Leftrightarrow \ell = 0$ ou $1 - a + a \ell = 0$
et $1 - a + a \ell = 0 \Leftrightarrow a \ell = a - 1 \Leftrightarrow \ell = (a - 1) / a$