

La géométrie non euclidienne

[géométrie hyperbolique plane]

par
Damien HECQUET et David PELLETIER
(Lycée d'Altitude, Briançon)

Club Math.en..Jeans 1999-2000.

Enseignants : *Hubert PROAL*
Chercheur (correspondant) : *Patrick VÉROVIC*
(Université de Savoie, Chambéry)



Figure 1 : l'exposé au Palis de la découverte

Sujet initial

La géométrie non euclidienne de Poincaré (H. Proal)
Redéfinir, dans le demi-plan de Poincaré [1], les objets de la géométrie.

La géométrie non euclidienne est totalement différente de la géométrie «classique». En effet elle ne s'étudie pas dans un plan complet mais seulement dans le *demi-plan de Poincaré* [1]. Dans celui-ci toutes les notions doivent être redéfinies.

On appelle "**droites**" toute demi-droite perpendiculaire au demi plan ou tout demi-cercle dont le centre est situé sur la limite du demi plan [2]. Diverses questions peuvent se poser alors:

Comment peut-on définir des droites parallèles ?

Dans le plan, une droite est parallèle à une autre lorsqu'elles ne se coupent jamais. La transitivité dit que quand on a deux droites parallèles, toute droite parallèle à l'une est parallèle à l'autre. Dans la géométrie non euclidienne, les droites parallèles ne se coupent toujours pas [par définition] mais la propriété de transitivité n'est pas vérifiable ici [voir la figure].

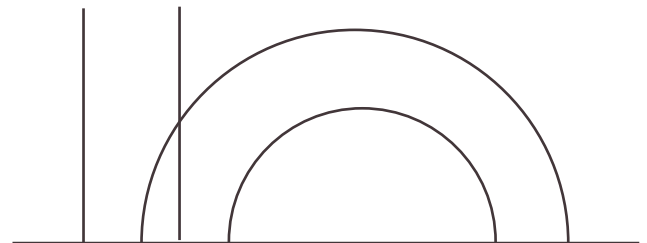


Figure 2

Par deux points, peut-on faire passer une unique droite ?

Pour construire cette droite il faut construire la médiatrice des 2 points dans le cas où ils pas disposés verticalement, elle coupe la frontière du demi-plan au niveau du centre du « demi-cercle »

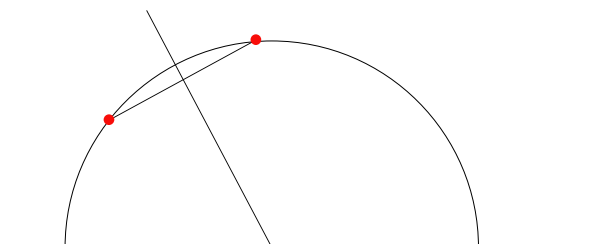


Figure 3

De plus à partir d'un point unique et d'une droite on peut construire une infinité de droites parallèles à la première et passant par le point. C'est le *cinquième postulat* permettant d'établir une géométrie comme euclidienne ou pas [3].

Que deviennent les polygones?

Les triangles.

Par définition, un *triangle* est formé par trois droites se coupant deux à deux.

En géométrie non euclidienne, il existe deux types de triangles :

-Ceux formés par trois droites « demi-cercles » :

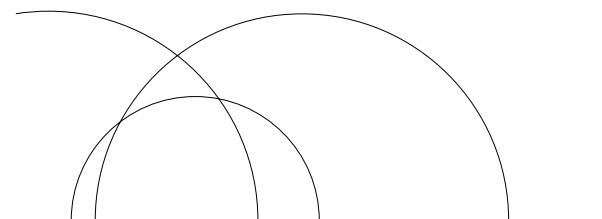


Figure 4

-Ceux formés par deux droites « demi-cercles » et une droite « normale » :

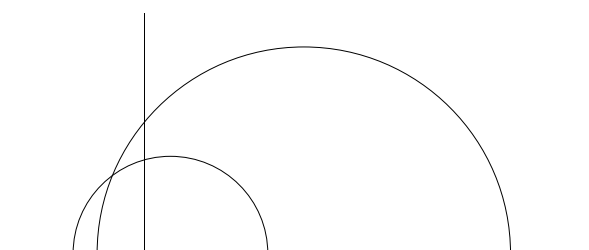


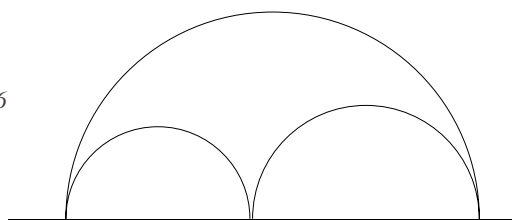
Figure 5

Tout le monde sait que la somme des angles dans un triangle [euclidien] équivaut à 180° .

Mais ici ce n'est pas le cas puisque elle varie entre deux limites [4],

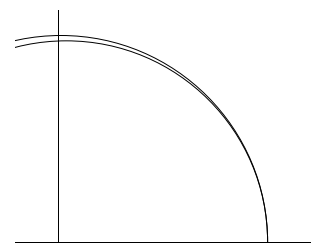
- de 0° :

Figure 6



- à 180° :

Figure 7



Les quadrilatères.

Dans la lignée des triangles, ce sont 4 droites qui se coupent deux à deux [5]. Là aussi plusieurs exemples:

-Ceux formés par deux demi-droites et deux demi-cercles de même centre :

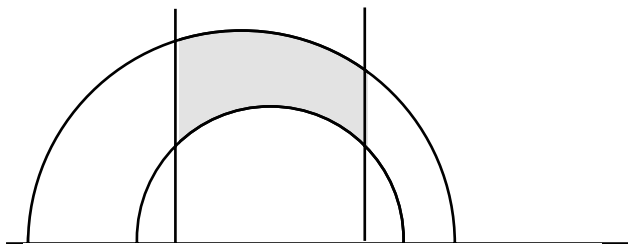


Figure 8

-Ceux formés avec une seule demi-droite :

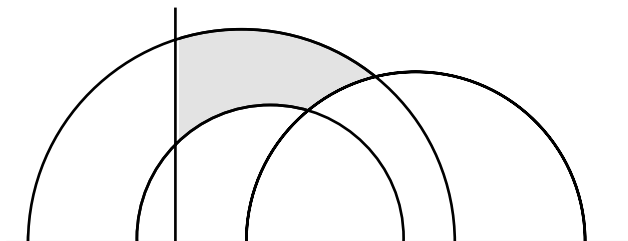


Figure 9

-Ceux formés par 4 « demi-cercles » :

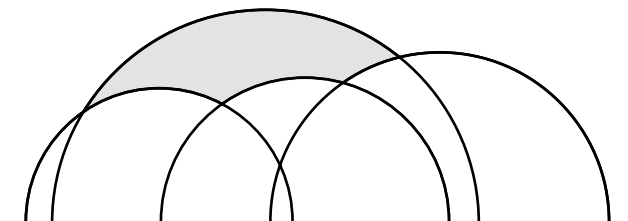


Figure 10

On peut là aussi se poser la question de la somme des angles. Eh bien elle varie d'un cas extrême de 0° à 360° [6].

Note de l'enseignant

Le problème qui est apparu en fin d'année et qu'ils ne sont pas arrivés à résoudre est :

Construire une droite qui passe par un point donné et qui est perpendiculaire à une droite donnée.

• A

Si vous avez une solution, écrivez nous :

maths_briancon@yahoo.fr

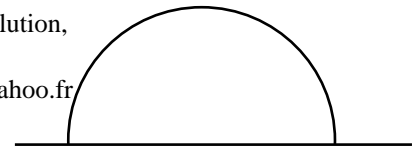


Figure 11

Notes des éditeurs

1 — En changeant le cinquième postulat d'Euclide (voir note 3), mais pas les autres, Lobachevsky a créé une nouvelle *géométrie, non-euclidienne*, appelée *géométrie hyperbolique*. Poincaré a imaginé un modèle de cette géométrie, c'est à dire une manière de **représenter** ses notions de base (encore appelés "points", "droites", "segments", "angles", "longueur", etc.) et de **traduire** ses propriétés (les nouveaux axiomes et leur conséquences) en se servant de figures de la géométrie usuelle (euclidienne). Dans ce modèle, appelé *demi-plan de Poincaré*, les "points" de Lobachevsky sont représentés par les points d'un demi-plan (frontière comprise). D'autres modèles existent, d'autres géométries non-euclidiennes aussi.

2 — Pour aider le lecteur, nous avons changé la typographie des noms d'objets géométriques du modèle de Poincaré, (droite, triangle, quadrilatère, ...) en gardant une typographie normale pour les notions euclidiennes (droite, triangle, quadrilatère, cercle, ...).

3 — Euclide avait fondé l'étude de la géométrie par

Géométrie non euclidienne

une liste d'*axiomes* ou *postulats*. Le cinquième de ces axiomes (le "*postulat des parallèles*") affirme : « Par un point pris hors d'une droite (D) donnée, il passe une droite parallèle à (D) et une seule ». Dans la géométrie de Lobachevsky, ceci devient : « Par un point pris hors d'une droite (D) donnée, il passe une infinité de droites parallèles à (D) ».

4 — L'angle de deux droites (d) et (d') doit être défini ; par exemple, si (d) et (d') sont des demi-cercles sécants en P, l'angle de (d) et (d') sera l'angle formé par les droites tangentes en P à ces demi-cercles. Ainsi, l'angle de deux droites sécantes distinctes peut être nul (!) et la valeur 0° pour la somme des angles d'un triangle peut être atteinte (figure 6). La valeur 180° , par contre, ne peut être qu'approchée (figure 7).

5 — Pour une définition plus précise, il convient de choisir un ordre circulaire pour ces droites, et de supposer que deux droites consécutives dans cet ordre se coupent.

6 — Comme dans le cas des triangles, seule la valeur 0 peut être réalisée exactement.