Alerte au voleur

Année 2021 – 2022

Élèves de 3ème : Eglantine EYMARD, Sarah HAOUAM, Oumniya RIFFI ASRI et Eden TRICHEREAU.
Élèves de 4ème: Dylan AMEROUS, Elias GAOUI, Raphaël ROCHE et Amaury VICQ.
Établissement : Collège Alain-Fournier d'Orsay (91).
Enseignante : Florence FERRY.
Chercheur : Olympio HACQUARD.

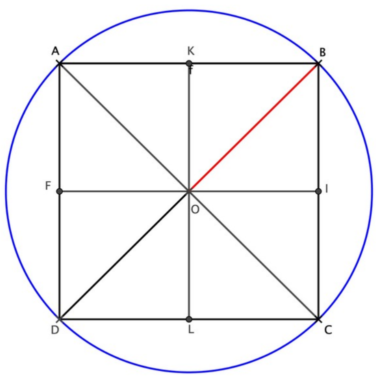
Le sujet : On cherche à protéger une pièce carrée de taille *a* d'un musée en installant des détecteurs de position au sol. Un détecteur émettra un signal prévenant la police si un individu se trouve à une distance inférieure à *R* du détecteur. Combien de détecteurs doit-on placer pour sécuriser complètement la salle ?

Nos résultats : Nous avons calculé le rayon minimum qu'il faut au détecteur si l'on veut n'en placer qu'un, ou deux ou quatre. Pour en placer trois, nous avons conjecturé le rayon minimum à avoir. Nous avons pris ensuite le sujet d'une autre manière : si les détecteurs ont un rayon fixé, quelle configuration de détecteurs permet d'en placer le moins possible. Là encore nous avons un résultat qui n'est qu'une conjecture. Pour finir, nous nous sommes intéressés à l'aire perdue (détecteurs qui se superposent) : nous avons démontré que l'aire perdue reste la même si nous plaçons des détecteurs lorsque la salle est découpée en carrés.

I – Recherche d'un rayon minimum

On considère pour la suite de l'article, le cas particulier d'une pièce carrée de 10 m de côté.
Commençons par regarder quelle taille doivent avoir les détecteurs si l'on souhaite en mettre un, puis deux, puis trois… Autrement dit, comment couvrir totalement un carré de côté 10 m avec un cercle ou plusieurs cercles de rayon le plus petit possible ?

1) Un seul détecteur



Nous plaçons le centre du cercle représentant le détecteur au centre de la pièce, centre du carré.

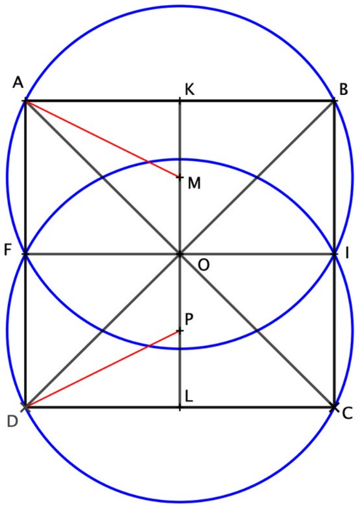
Calcul du rayon : BCD est rectangle en C.
D'après le théorème de Pythagore :

$$BD^2 = BC^2 + CD^2$$
$$BD^2 = 10^2 + 10^2$$
$$BD^2 = 200$$

Or, BD>0 donc : $BD = \sqrt{200}\ m$

Le rayon est donc de $r = \frac{\sqrt{200}}{2} = \sqrt{50}\ m$ ce qui nous donne environ 7, 07 m.
Conclusion : si le rayon est supérieur ou égal à $\sqrt{50}\ m$, le détecteur recouvrira toute la salle, s'il est inférieur, il en faudra alors un deuxième.

2) Deux détecteurs



Cette configuration nous semble être la meilleure, avec un rayon minimal. Chaque cercle passe par deux sommets consécutifs du carré et par les milieux de deux côtés opposés. Sur la figure ci-contre, M et P sont les centres des deux cercles.
ABI est rectangle en B donc son cercle circonscrit a pour diamètre l'hypoténuse [AI] et M est son milieu.
De même on a P le milieu de [DI].

Calcul du rayon : AIB est rectangle en B.
D'après le théorème de Pythagore :

$$AI^2 = AB^2 + BI^2$$
$$AI^2 = 10^2 + 5^2$$
$$AI^2 = 125$$

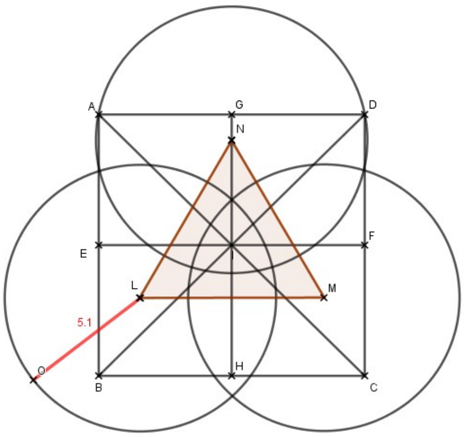
Or, AI>0 donc : $AI = \sqrt{125}\ m$

Le rayon est donc de $r = \frac{\sqrt{125}}{2}\ m$ ce qui nous donne environ 5, 59 m.

Conclusion : si le rayon est inférieur à $\frac{\sqrt{125}}{2}\ m$, il faudra un troisième détecteur.

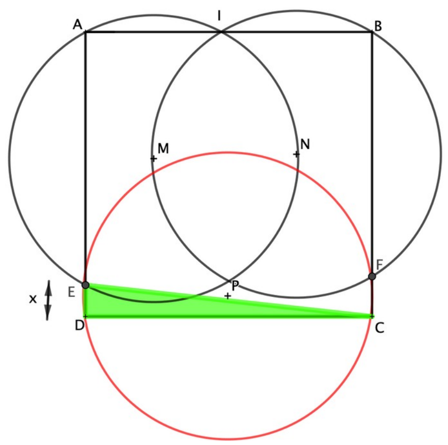
3) Trois détecteurs

Les premières recherches à la main et sur Géogébra nous ont permis de positionner les détecteurs ainsi :



Nous trouvons un rayon minimum d'environ 5,1 m.

Nous allons essayer de réduire au maximum ce rayon et trouver une position qui nous permettra de calculer celui-ci de façon précise.



Nous plaçons le premier cercle passant par le sommet A et le milieu I de [AB]. Le second cercle passe également par I et par le sommet B.
Le troisième cercle doit recouvrir la zone restante.
On note : ED = FC = x.

<u>Calcul du rayon</u>
Remarque :
- ED = FC et (ED)//(FC) donc EDCF est un parallélogramme. De plus, il a un angle droit, c'est donc un rectangle.
- EDC est rectangle en D, il est inscrit dans un cercle donc [EC] est le diamètre de ce cercle. De même pour [DF]. Donc le point P, milieu de [EC] et de [DF], est le centre du cercle. Notons r son rayon.

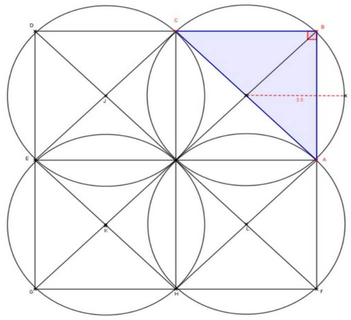
ECD est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :
$EC^2 = ED^2 + DC^2$ d'où : $(2r)^2 = x^2 + 10^2$ d'où : $4r^2 = x^2 + 100$ (*)
De même : AEI est rectangle en A donc [EI] est un diamètre. D'après le théorème de Pythagore : $(2r)^2 = (10-x)^2 + 5^2$ d'où : $4r^2 = 100 - 20x + x^2 + 25$ d'où : $4r^2 = x^2 - 20x + 125$

$4r^2 = x^2 + 100$ et $4r^2 = x^2 - 20x + 125$ on a donc : $x^2 + 100 = x^2 - 20x + 125$ soit : $120x = 125$
On a donc $x = 1{,}25$. On remplace cette valeur dans (*) : $4r^2 = 1{,}25^2 + 100$
d'où : $r^2 = \frac{(1{,}25^2 + 100)}{4}$ d'où : $r^2 = 25{,}390625$ Finalement : $r = \sqrt{25{,}390625}$ m ce qui donne environ 5,04 *m*.

Remarque : nous ne sommes pas sûrs que ce soit la configuration optimale ; il y a d'autres façons de placer les disques. Nous avons utilisé cette configuration car, après de multiples recherches avec des découpages puis des tracés sur le logiciel Géogébra, elle nous a semblé la meilleure et c'est la seule qui nous a permis de calculer précisément le rayon.

Conclusion : Nous conjecturons qu'en dessous de cette dernière valeur de *r*, il nous faudra un détecteur de plus.

4) Quatre détecteurs



Nous séparons notre pièce de 10 mètres de côté en quatre carrés identiques. Les centres des détecteurs sont les points d'intersection des diagonales et les diagonales sont des diamètres.

Calcul du rayon
ABC est rectangle en B, d'après le théorème de Pythagore : $CA^2 = CB^2 + BA^2$

$CA^2 = 25 + 25$

$CA^2 = 50$

$CA > 0 \; donc \; CA = \sqrt{50}$

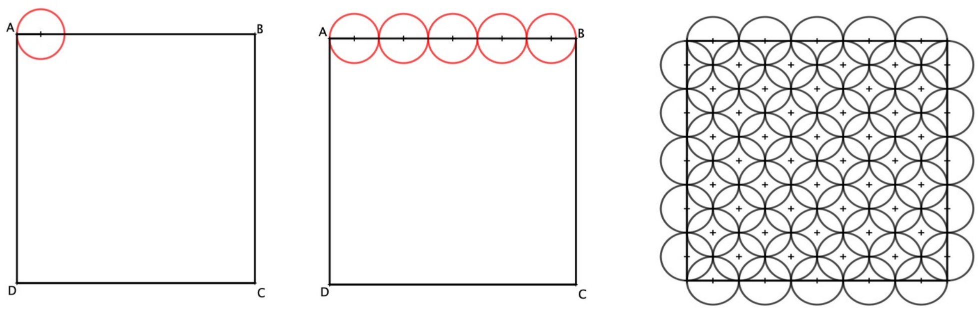
Conclusion : quatre détecteurs suffiront si le rayon est supérieur ou égal à $\frac{\sqrt{50}}{2}$, sinon il en faudra un cinquième.

II – Nombre minimum de détecteurs de rayons fixés

Au delà de quatre détecteurs, il est très compliqué de calculer précisément le rayon. Nous nous sommes donc posés le problème autrement. Nous reprenons une pièce de départ de 10 mètres de côté et nous y plaçons des détecteurs, cette fois de rayon défini ; on prendra par exemple 1 mètre de rayon.
Nous avons étudié deux façons de placer les détecteurs :
- la première méthode consiste à placer les centres des cercles sur les côtés de la pièce puis de la remplir pas à pas de détecteurs.
- la deuxième méthode consiste à placer less centres des cercles à l'intérieur de la pièce.

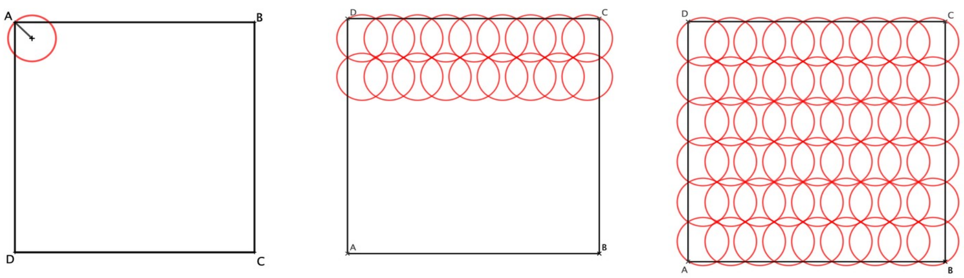
Quelle méthode sera la meilleure ?

PREMIERE METHODE



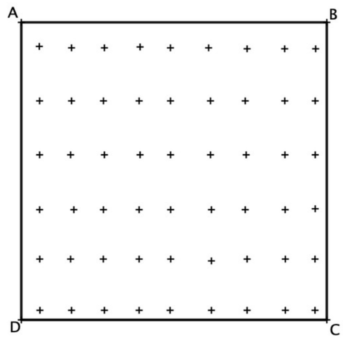
Nous trouvons 60 détecteurs.

DEUXIEME METHODE



Nous trouvons 54 détecteurs.

Cette deuxième méthode est la meilleure que nous ayons trouvée. Examinons la de plus près pour voir comment sont placés les centres.



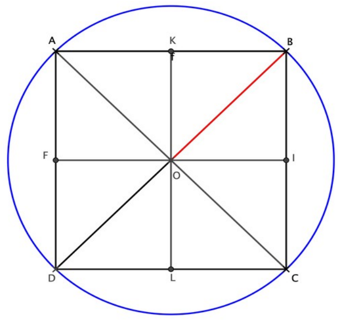
Les centres forment comme un quadrillage.

Remarque : là encore, cette configuration n'est pas forcément la meilleure. Elle peut nous donner une indication quant au placement des centres de 5 détecteurs et plus.

III – Surface perdue

Enfin, nous nous sommes demandés quelle était la surface perdue, c'est à dire la surface balayée par deux détecteurs en même temps.
Dans cette partie nous prenons un carré de côté *a*.

1) Un détecteur



On note *r* le rayon du détecteur.
ABCD étant un carré, AOB est rectangle en D.
D'après le théorème de Pythagore : $OA^2+OB^2=a^2$

D'où : $r^2+r^2=a^2$ d'où : $2r^2=a^2$ d'où : $r^2=\frac{a^2}{2}$

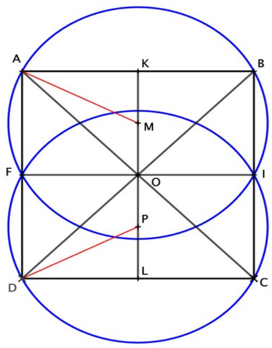
Finalement : $r=\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$

L'aire perdue est la différence entre l'aire du disque et l'aire du carré :

$$A=\pi\times r^2-a^2=\pi\frac{a^2}{2}-a^2=a^2\left(\frac{\pi}{2}-1\right)$$

Ainsi, pour un carré de côté 10 m, l'aire perdue est d'environ $57\,m^2$.

2) Deux détecteurs



AIB est rectangle en D, d'après le théorème de Pythagore :

$$AI^2=BI^2+AB^2 \text{ d'où : } AI^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+a^2=\frac{5a^2}{4}$$

Donc : $AI=\sqrt{\frac{5}{4}a^2}=\frac{a}{2}\sqrt{5}$ et $r=\frac{AI}{2}=\frac{a}{4}\sqrt{5}$

L'aire perdue est le double de la différence entre l'aire du disque et l'aire d'un rectangle :

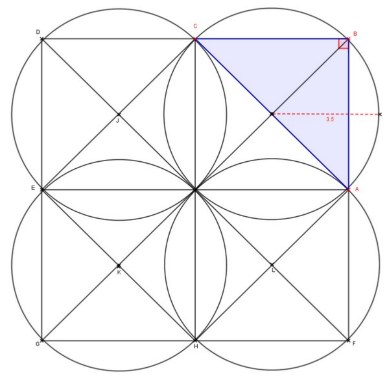
$$A=\left(\pi\times r^2-a\times\frac{a}{2}\right)\times 2 \text{ d'où : } A=2\pi\times r^2-a^2 \text{ d'où : } A=2\pi\times\frac{5a^2}{16}-a^2 \text{ d'où } A=5\pi\frac{a^2}{8}-a^2$$

Donc : $A=a^2(\frac{5\pi}{8}-1)$

Pour un carré de côté 10 m, l'aire perdue est d'environ $96\,m^2$ ce qui est bien supérieur à l'aire perdue trouvée pour un détecteur.

Remarque : nous n'avons pas réussi à calculer la surface perdue pour trois détecteurs.

3) Quatre détecteurs



On calcule de même avec le théorème de Pythagore :

$(2r)^2=(\frac{a}{2})^2+(\frac{a}{2})^2$ d'où $4r^2=\frac{2a^2}{4}$ d'où : $r^2=\frac{a^2}{8}$

Donc : $r=\frac{a}{\sqrt{8}}$

Aire perdue : $A=4\times(\pi\times r^2-\frac{a}{2}\times\frac{a}{2})$

d'où : $A=4\times(\frac{\pi\times a^2}{8}-\frac{a^2}{4})$ soit : $A=\pi\frac{a^2}{2}-a^2$

On remarque que l'aire perdue pour quatre détecteurs est la même que celle trouvée pour un détecteur !

Regardons alors l'aire perdue pour seize détecteurs.
Comme pour quatre détecteurs, le carré de départ est partagé en 16 carrés identiques et chaque détecteur est positionné de façon à passer par chaque sommet d'un carré.

Si r est le rayon des détecteurs, on a : $(2r)^2=2\times(\frac{a}{4})^2$ d'où : $4r^2=\frac{a^2}{8}$ d'où : $r^2=\frac{a^2}{32}$

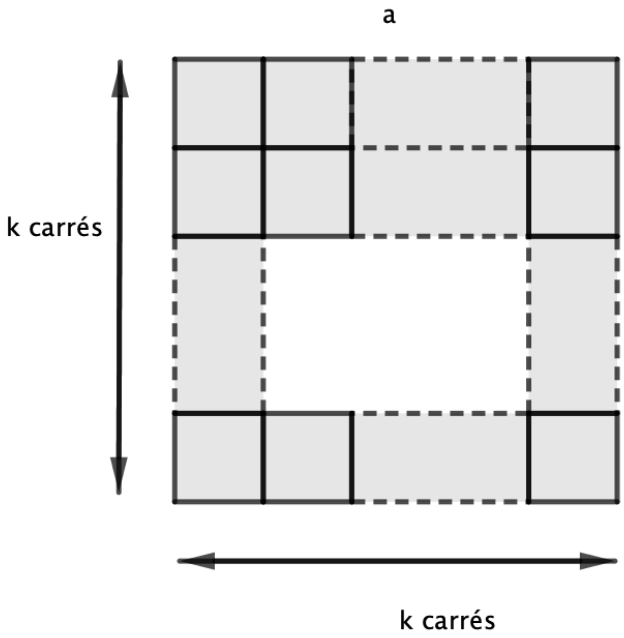
L'aire perdue est la différence entre l'aire d'un des disques et l'aire d'un carré multipliée par 16 :

$A=16\times(\frac{\pi\times a^2}{32}-\frac{a}{4}\times\frac{a}{4})$ donc $A=\pi\frac{a^2}{2}-a^2$

On remarque que l'aire perdue pour seize détecteurs est la même que celle trouvée pour un détecteur également !

Conjecture : Si on découpe la salle en carrés et qu'on y place les détecteurs, la surface perdue reste toujours la même, il ne dépend pas du nombre de carrés.

Démonstration :
On découpe la salle de longueur *a* en $k\times k$ carrés ; k est entier strictement positif. Le côté des carrés a donc pour longueur *a/k*.



Le rayon d'un détecteur (positionné sur un carré) est calculé comme précédemment avec le théorème de Pythagore : $(2r)^2 = 2\times(\frac{a}{k})^2$ d'où : $4r^2 = \frac{a^2\times 2}{k^2}$ d'où : $r^2 = a^2\times\frac{2}{4k^2}$ d'où : $r^2 = a^2\times\frac{1}{2k^2}$

L'aire perdue est la différence entre l'aire d'un des disques et l'aire d'un carré que multiplie le nombre de carrés (k^2) :

$$A = k^2\times(\pi\times r^2 - \frac{a}{k}\times\frac{a}{k}) = k^2\times(\frac{\pi\times a^2}{2k^2} - \frac{a^2}{k^2}) = \frac{\pi\times a^2}{2} - a^2 = \pi\frac{a^2}{2} - a^2$$

cette surface ne dépend pas du nombre de carrés *k*, elle est donc bien constante.