

Une Pension pour Chiens

Année 2024-2025

Ahmed-el-Tayeb Oukaf, Ajla Hadzic, Aylin Akgöz, Mouad Ferchouche, Ibrahim Yahiaoui, Luka Picard, Salma-Alaa Ghassir, May Hafidhi, Youssef Yahiaoui, Salim Ghezzar

Etablissement : Collège Elsa Triolet

Enseignant : Pascal Corm

Chercheurs : Rémi Watrigant et Malory Marin - Laboratoire de l'Informatique du Parallélisme (ENS de Lyon)

1 . Présentation du contexte

Ce sujet parle d'une pension pour chiens.

On accueille des chiens qui s'aiment ou qui ne s'aiment pas.

Deux contraintes :

- 1) Ceux qui ne s'aiment pas ne doivent pas se rencontrer
- 2) Ceux qui s'aiment doivent pouvoir se rencontrer

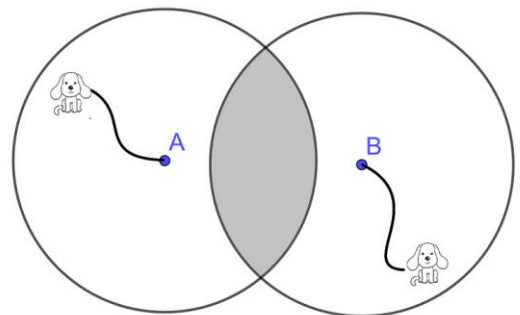
2. Hypothèses et représentations

Les chiens doivent être attachés à des poteaux pour éviter les déplacements entre eux.

On choisit que les laisses doivent être de même longueur.

La zone où les chiens peuvent se déplacer correspond à des disques de même rayon.

La zone grise correspond à une zone où les chiens peuvent se rencontrer.



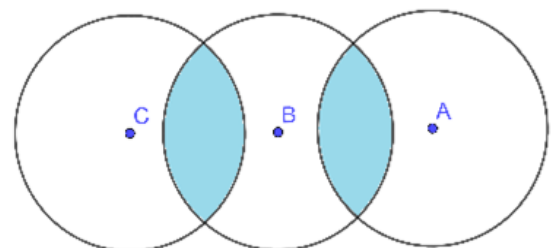
3. Les exemples et la question

3.1. SITUATION 1 :

- B aime A et C
- A et C ne s'aiment pas.

Représentation sous forme de disques :

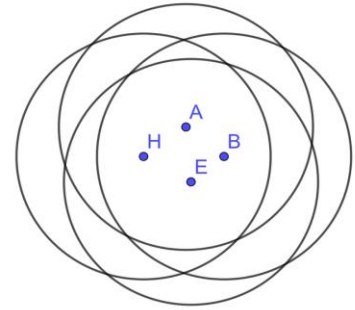
Légende : Les zones bleues, ce sont les lieux où le chien B peut rencontrer le chien C ou le chien A.



Remarque : les disques de centre A et C ne se touchent pas.

3.2 : **SITUATION 2** : 4 chiens A, B, E et H s'aiment tous entre eux
Représentation sous forme de disques :

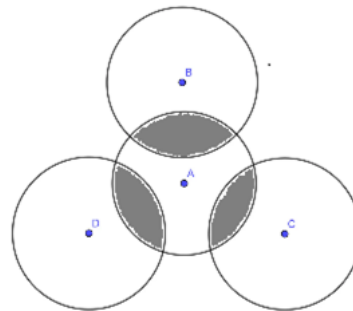
Remarque : Si on attachait les quatre chiens à un même poteau cela fonctionnerait aussi.



Certaines situations ont une représentation en disques et d'autres non. On dira que certaines situations fonctionnent et d'autres non.

3.3. **Une situation qui fonctionne (SITUATION 3)** : 4 chiens A, B, C et D. Le chien A aime tous les autres chiens mais eux ne s'aiment pas entre eux.

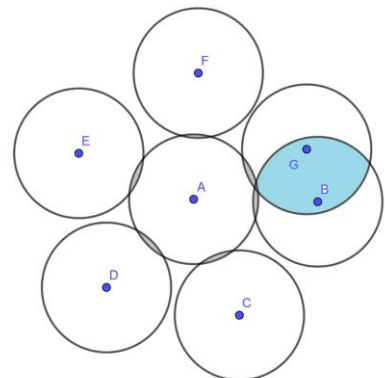
Solution :



3.4. **Une situation qui ne fonctionne pas (SITUATION 4)** : 7 chiens A, B, C, D, E, F et G. Le chien A aime tous les autres chiens mais eux ne s'aiment pas entre eux.

Cette situation n'a pas de solution. Ici G et B se touchent (zone bleue).

Nous verrons la preuve plus loin.



La question que nous nous sommes posée est donc :

« Quelles situations ont une solution et lesquelles n'ont pas de solution ? »

4 . Un outil : le graphe

Les graphes servent à représenter les chiens qui s'aiment et qui ne s'aiment pas.

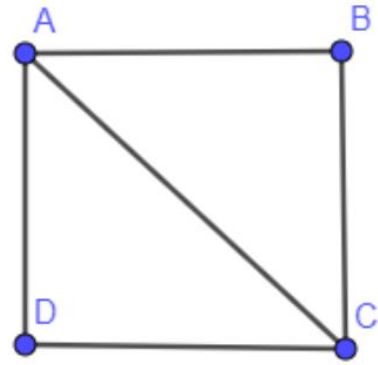
Exemple- Situation :

4 chiens A, B, C et D

A et C aiment tous les chiens

B et D ne s'aiment pas

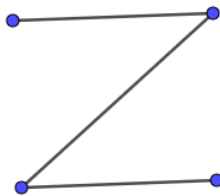
A l'aide de l'outil GeoGebra, nous avons fait le graphe correspondant. Les sommets désignent des chiens et les arêtes les chiens qui s'aiment.



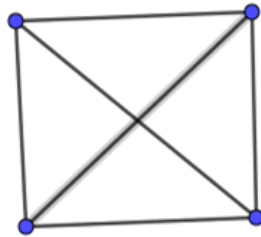
5 : Présentation des graphes à 4 chiens

5.1. Tous les graphes à 4 chiens

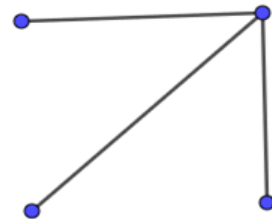
Il existe six graphes différents à 4 chiens (sans compter les graphes non reliés)



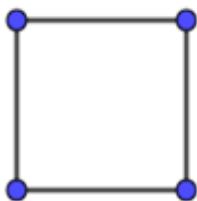
Le serpent



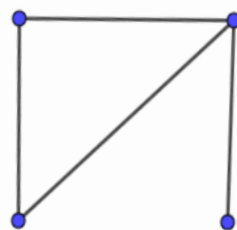
Les amoureux



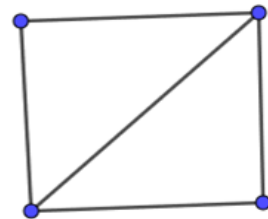
L'étoile à 3 branches



Le carré



Le solitaire



Les deux intouchables

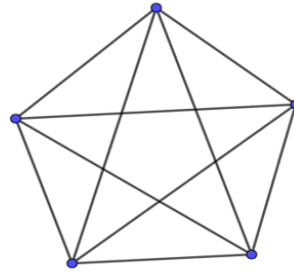
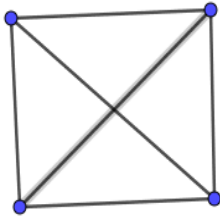
Nous leur avons attribué des noms en fonction de leurs caractéristiques comme par exemple « Le serpent » qui ressemble à un serpent ou encore les amoureux où tout le monde s'aime. 1

5.2. Comment calculer le nombre maximal d'arêtes dans un graphe ?

Un graphe peut comporter plusieurs nombres d'arêtes : 4, 5, 6...

Plus on a de chiens plus cela devient long et difficile de les compter alors on a trouvé un calcul pour obtenir plus simplement et rapidement ce nombre maximal.

Exemple avec les graphes à 4 et à 5 chiens



Si on compte les arêtes du graphe à 4 chiens on remarque qu'il en comporte 6 et sur le graphe à 5 chiens on remarque qu'il en comporte 10.

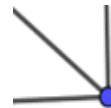
Mais si on compte le nombre d'arêtes maximum d'un graphe à 15 chiens, cela prendra du temps et sera plus compliqué, alors on va utiliser un calcul pour trouver la solution plus rapidement et plus simplement :

Calcul du graphe à 4 chiens (4 sommets) : $\frac{4 \times (4-1)}{2}$

Dans ce calcul le chiffre 4 représente le nombre de sommets:

(4-1) représente le nombre d'arêtes par point (-1 car on ne compte pas le sommet d'origine)

On divise le tout par 2 car sinon les arêtes seront en double :



On peut généraliser ce calcul en remplaçant 4 par N le nombre de chiens, ce qui nous donne :

$$\frac{N \times (N-1)}{2}$$

Quel que soit le nombre de chiens, le raisonnement sera le même.

6 : Les étoiles

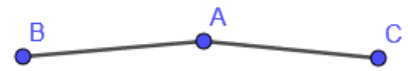
6.1. Définition

Une étoile est tout d'abord composée d'un chien central qui est encerclé d'autres chiens. Le principe d'une étoile c'est de faire en sorte que les chiens qui entourent le chien central n'aiment que le chien du centre et ne s'aiment pas entre eux.

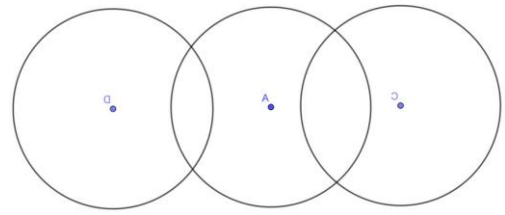
6.2. Exemples

Exemple de l'étoile à deux branches : A aime C et B tandis que C et B ne s'aiment pas

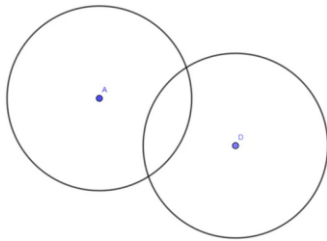
Pour bien matérialiser ces étoiles et les comprendre plus facilement nous les avons représentées sous formes de graphes :



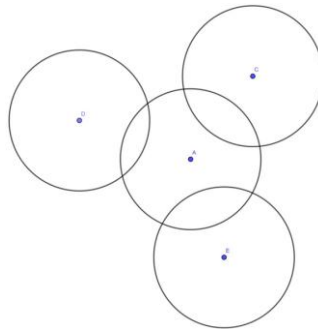
Étoile à 2 branches matérialisée sous forme de disques.



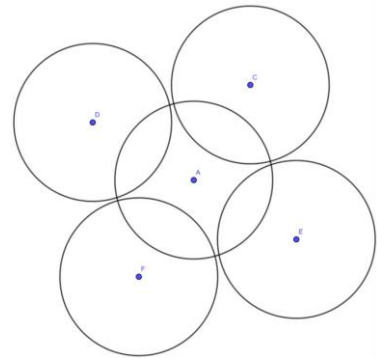
Voilà donc quelques étoiles (de l'étoile à une branche à celle à 6 branches, sans compter l'étoile à 2 branches bien sûr) sous forme de disques :



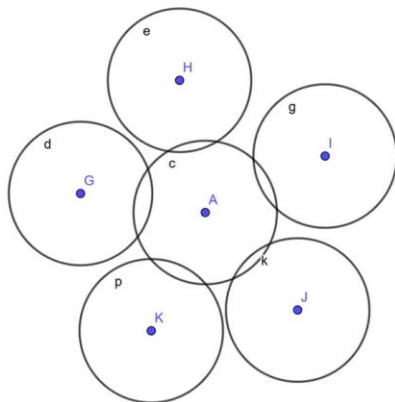
Étoile à une branche



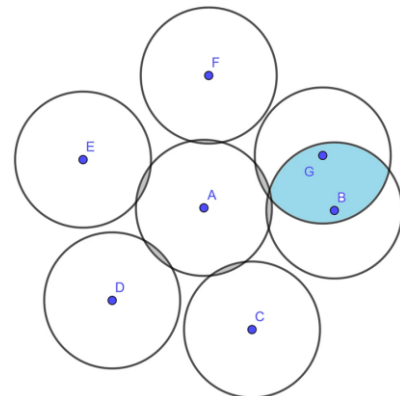
Étoile à trois branches



Étoile à quatre branches



Étoile à cinq branches



Étoile à six branches

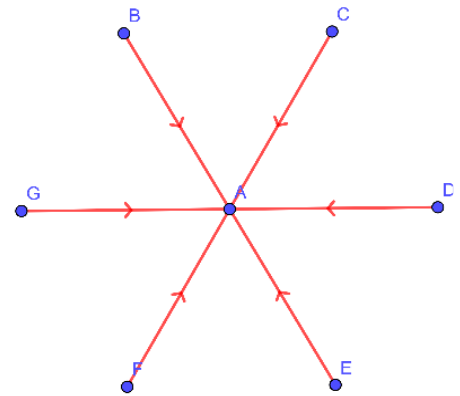
Nous nous sommes ensuite attardés sur le cas de l'étoile à 6 branches. Nous avons alors constaté que c'était impossible de disposer tous les disques suivant les directives données. Nous nous sommes donc mis à chercher une preuve ou un début de preuve qui puisse démontrer notre conjecture.

6.3. Début de preuve que l'étoile à 6 branches n'a pas de solution en disques

Dans le cas de l'étoile à six branches, nous avons 7 chiens : A, B, C, D, E, F, G.

A aime tout les chiens et tous les chiens aiment A mais les autres chiens ne s'aiment pas entre eux.

Cette représentation est une représentation en graphe d'une étoile à six branches.



Pour commencer nous avons réalisé une étoile à six branches régulières, sous forme de disques, avec des disques qui sont tangents. Les angles entre les segments doivent être de 60 degrés pour que l'étoile soit régulière et symétrique. Car si nous divisons l'angle total du cercle (360°) par six nous obtenons 60 degrés. Calcul effectué : $360^\circ \div 6 = 60^\circ$

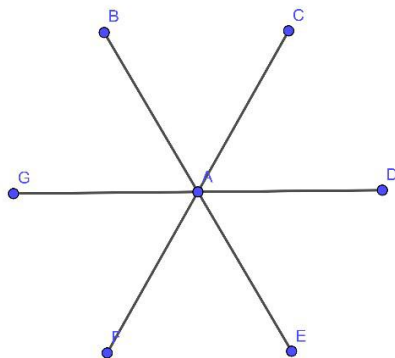
Programme de construction :

Étape 1 :

On place le point A. On place six autres points B, C, D, E, F, G tel que A est le point central.

On trace les arêtes de l'étoile à six branches qui sont tous à 1 cm du point central.

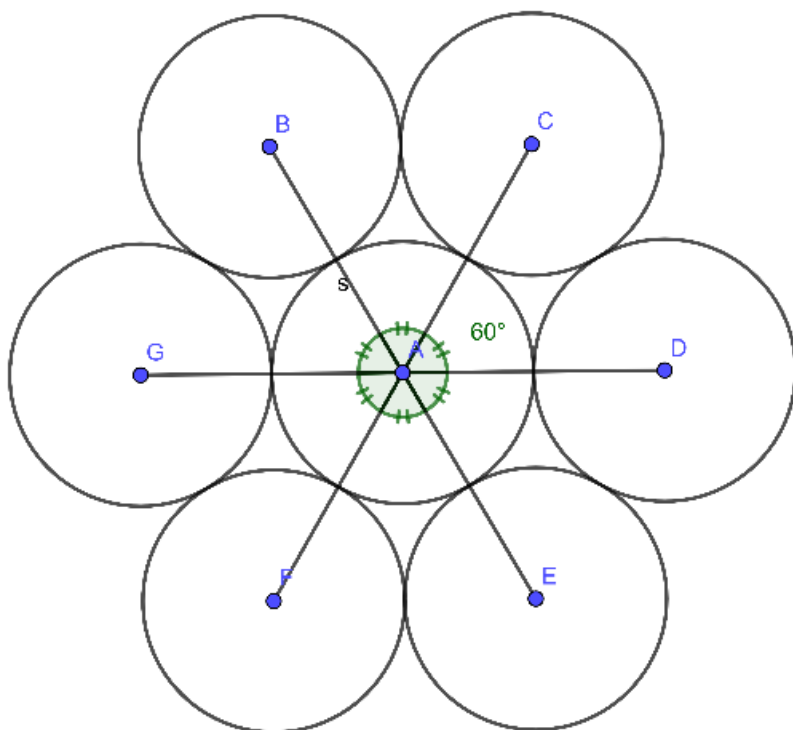
Tous les angles entre les segments valent 60° .



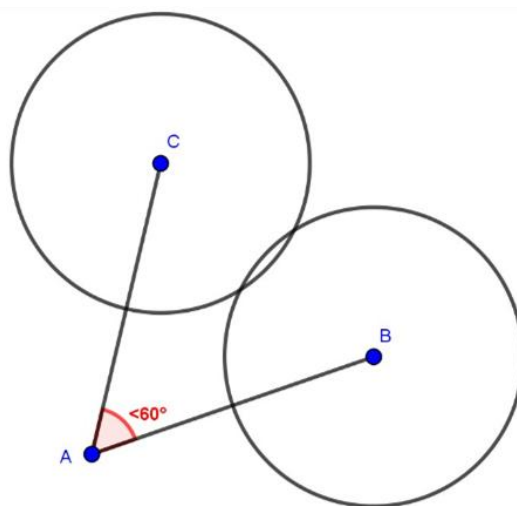
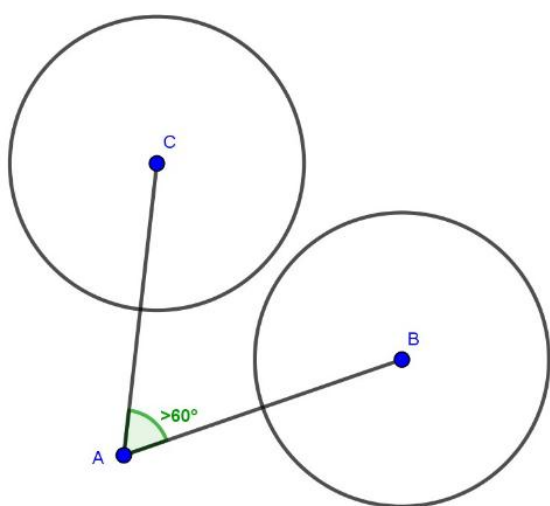
Étape 2 :

On trace 7 cercles de centres A, B, C, D, E, F et G de diamètre 1 cm.

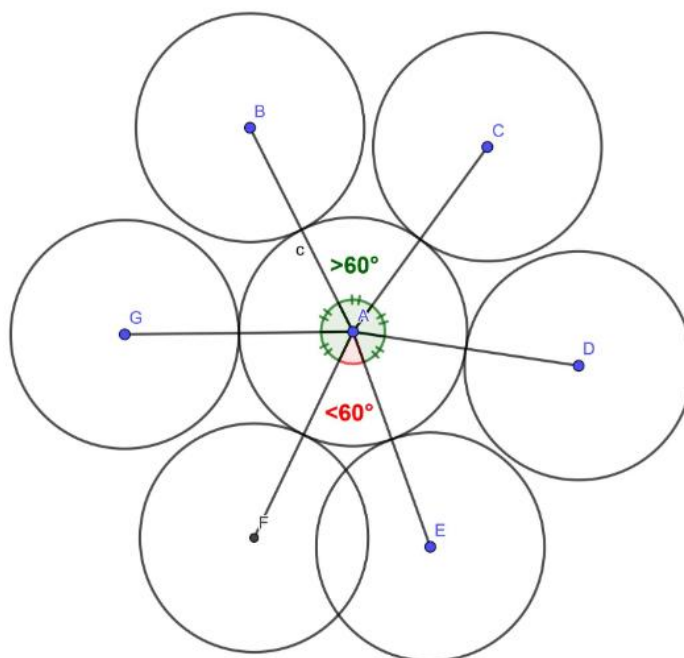
Les 6 disques extérieurs sont tangents au disque central et se touchent deux à deux.



Il est impossible de réaliser une étoile à six branches avec des cercles de même rayon qui ne se touchent pas, car les angles entre les segments des cercles ne seront pas de 60 degrés. Pour que les cercles ne se touchent pas, les angles formés entre les segments doivent être strictement supérieurs à 60 degrés. Si cinq angles sont strictement supérieurs à 60 degrés, alors forcément le sixième sera strictement inférieur à 60 degrés. [2]



En résumé, avec des cercles de même rayon qui ne se touchent pas, on ne peut pas obtenir 6 angles strictement supérieurs à 60 degrés entre les segments, ce qui rend l'étoile impossible à réaliser.



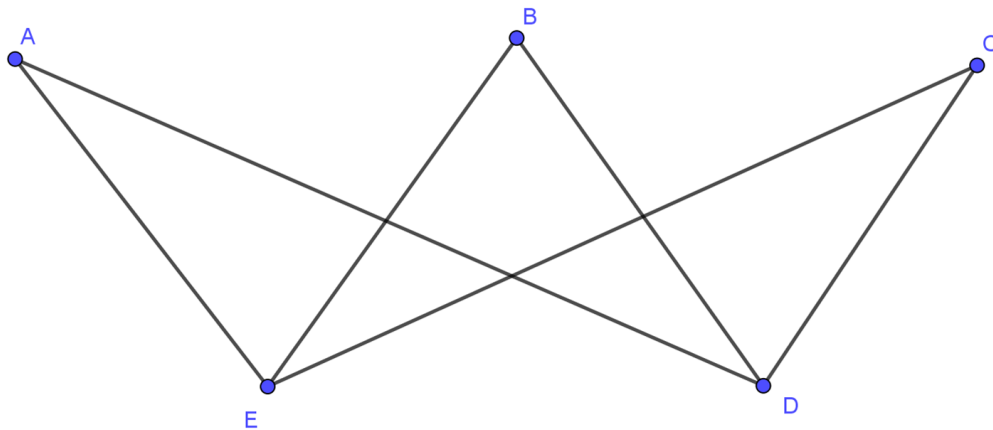
7. Présentation du K2-3

7.1 La Situation

3 chiens A, B et C qui ne s'aiment pas.

2 chiens D et E qui ne s'aiment pas.

Mais les chiens A, B et C aiment les chiens D et E.

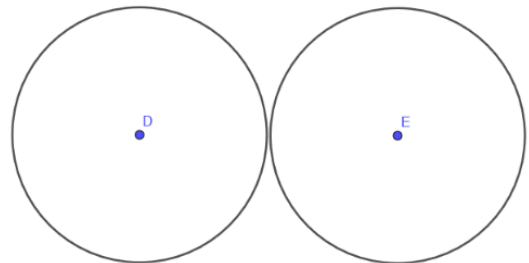


Cette situation est-elle réalisable avec des disques ?

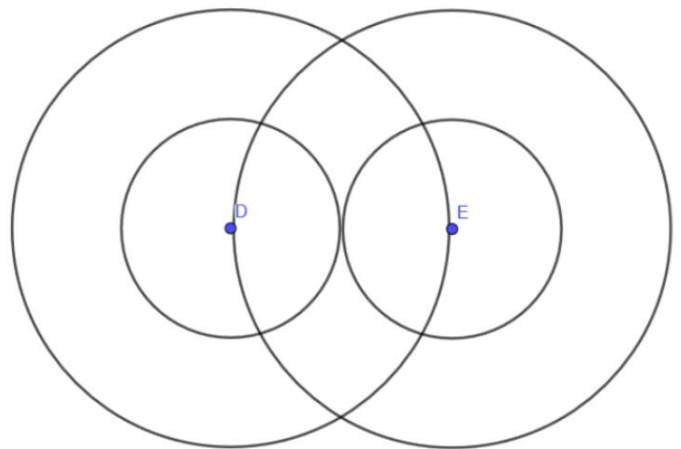
7.2. Preuve [3]

Nous allons devoir essayer de prouver que le K2-3 est **impossible** à réaliser en disque.

On commence par tracer 2 disques de rayon et de diamètre identique en les rapprochant le plus possible (mais sans qu'ils ne se touchent)

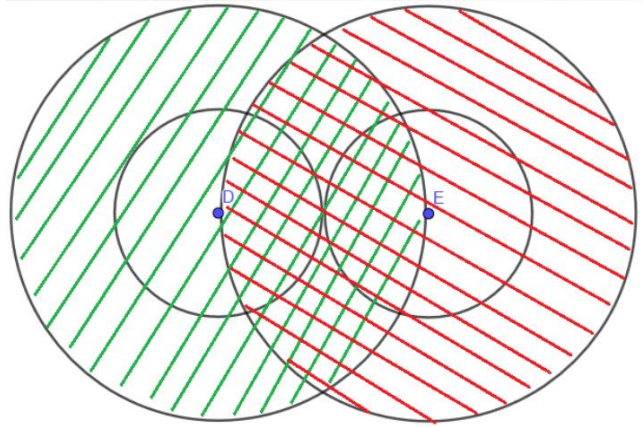


Puis on trace deux disques de rayon 2 fois plus grand que les disques précédents.

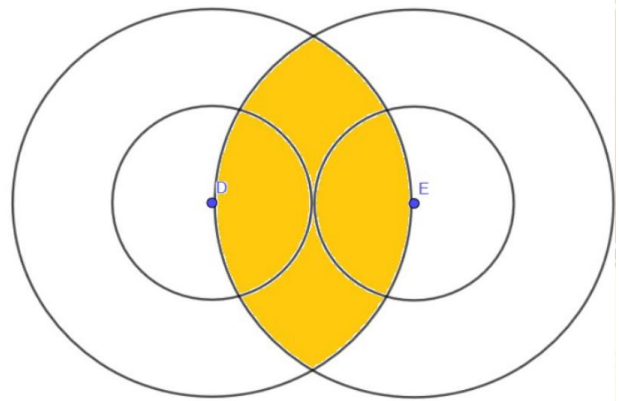


Dans la zone verte c'est là où si l'on place un chien, il touchera D.

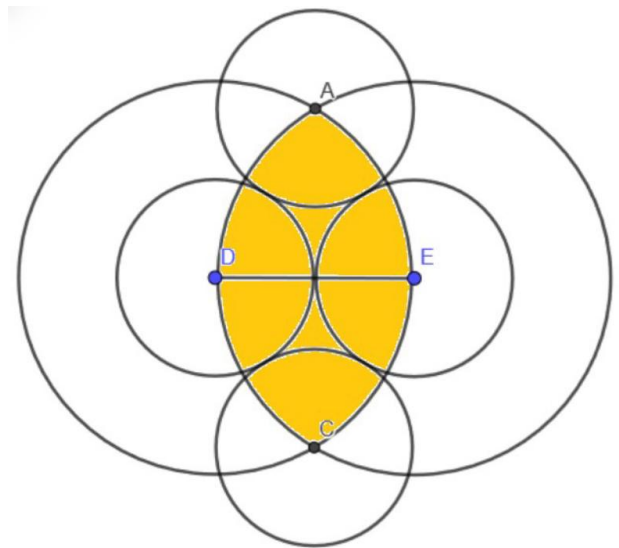
Dans la zone rouge, c'est là où si l'on place un chien, il touchera E.



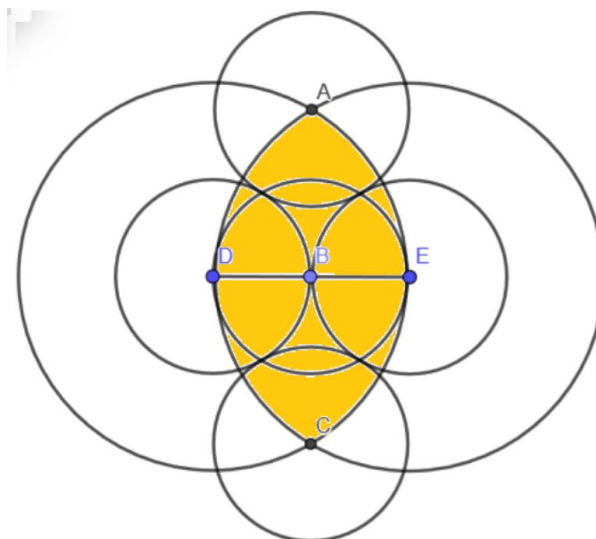
Puis on essaye de placer A, B et C à l'intérieur de la zone jaune pour que les disques touchent D et E.



On place A le plus « au nord » possible, et C le plus « au sud » possible, pour les éloigner le plus possible et espérer placer B entre les deux.



Sauf que là il y a un problème car on doit placer B mais si on le met « au nord » il va forcément toucher A alors que si on le met « au sud » il va toucher C.



CONCLUSION :

Il est impossible à réaliser en disques.

NOTES DE L'ÉDITION

[1] Il aurait été intéressant d'établir un lien entre les graphes et les figures constituées de cercles utilisées dans l'article. Les graphes peuvent-ils être utiles pour résoudre le problème ? Il faut également observer que le calcul du nombre maximal d'arêtes d'un graphe n'est pas pertinent dans ce travail.

[2] Ce fait est manifeste sur la figure, mais une démonstration mathématique rigoureuse nécessiterait un développement plus approfondi. Par exemple, il aurait été opportun d'ajouter quelques considérations sur la longueur des côtés des triangles ABC dans les deux cas.

[3] Dans ce cas également, les figures illustrent bien l'idée de base de la démonstration. Toutefois, quelques observations complémentaires auraient été souhaitables. On relève également quelques problèmes dans les figures. Il est indiqué que les disques sont « de diamètre identique en les rapprochant le plus possible (mais sans qu'ils ne se touchent) ». Cet aspect aurait dû être représenté plus clairement dans les figures, en mettant en évidence que les deux cercles de rayon double ne passent pas par les points D et E.