Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Démonstrations et Dessins
Année 2022-2023

<u>Elèves de 3ème</u> : Dixit-Rey-Flaud Timéo, Gardères Andoni, Goimard Alban, Pires-Iurilli Mélinda, Schönfelder Iseline.

Encadrés par : Barneix Chantal, Goyhetche Alain
Etablissements : Collège et Lycée Gaston Fébus, Orthez

Chercheur : Monsieur Jacky Cresson, Université de Pau et des Pays de l'Adour.

1-Présentation :

Nous avons étudié cette année les liens entre les dessins et des démonstrations géométriques dans un premier temps puis des dessins pour représenter des suites de sommes d'entiers dans un second temps.

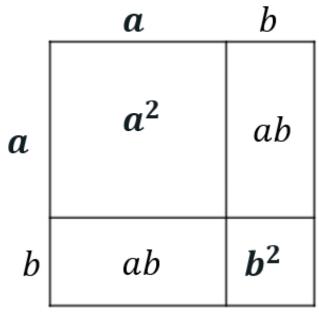
Dans la première partie, nous présenterons quelques démonstrations par dessins puis montrerons que parfois, les dessins peuvent nous tromper. Nous utiliserons alors des outils pour démontrer des propriétés (connues).

Puis nous utiliserons des dessins pour trouver des formules et calculer plus rapidement ces sommes.

Partie 1 : Premières démonstrations avec un dessin :

1.1/ Une identité remarquable

Tout d'abord, nous avons expliqué l'égalité $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$



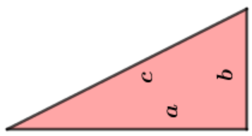
En considérant $(a+b)^2$ comme l'aire d'un carré de côté $a+b$. Le carré se décompose en deux carrés d'aire $a^2 et\ b^2$ ainsi que deux rectangle d'aire ab

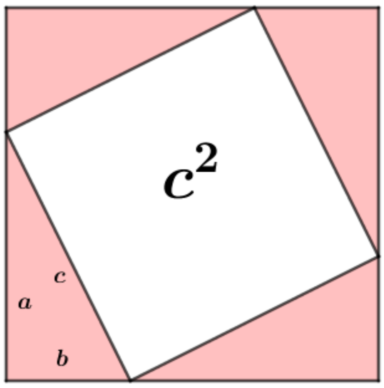
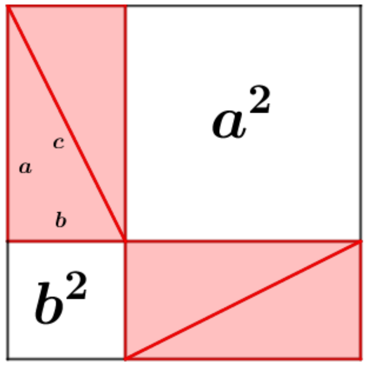
Ainsi $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

1.2/ Le théorème de Pythagore :

Avec quatre triangles rectangles de côtés $a\ et\ b$ d'hypoténuse c , nous avons cherché à expliquer la relation

$$a^2 + b^2 = c^2$$



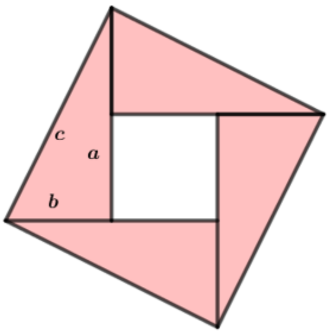
<table>
<tr><th>Premier dessin</th><th>Second dessin</th></tr>
<tr><td>
</td><td>
</td></tr>
<tr><td>Le grand carré :
- De côté $a + b$
- Constitué d'un carré central d'aire c^2 et de quatre triangles rectangles
L'aire est donc égale à $c^2 + 4\,Triangles$</td><td>Le grand carré :
- De côté $a + b$
- Constitué de deux carrés d'aire $a^2 + b^2$ et de quatre triangles rectangles

L'aire est donc égale à $a^2 + b^2 + 4\,Triangles$</td></tr>
</table>

Ces deux carrés ont le même côté donc la même aire, en enlevant les quatre triangles roses à ces deux figures, on obtient la relation : $a^2 + b^2 = c^2$

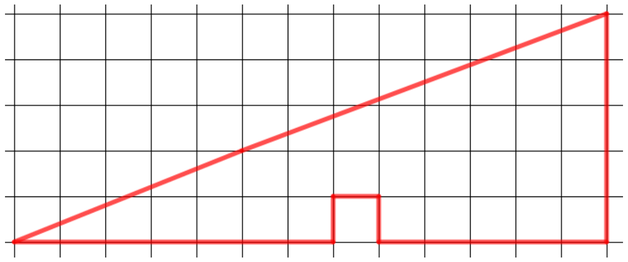
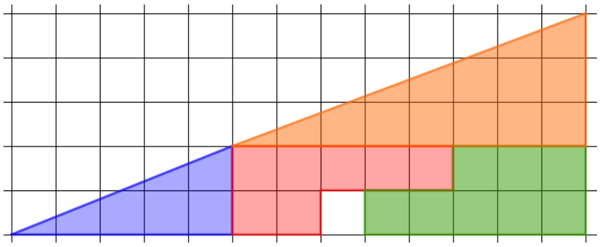
Remarque :

Nous avions trouvé un autre dessin (ci-contre) mais nous trouvions que, sans autre explication, la « démonstration » n'était pas évidente. Nous pourrons l'expliquer par la suite.



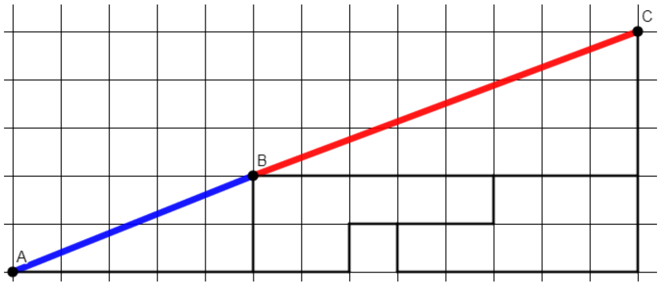
1.3/ les limites du dessin.

On nous a alors proposé ces deux dessins d'une même forme et on nous a demandé de calculer de deux façons l'aire de ce dessin.

<table>
<tr><th>Premier dessin</th><th>Second dessin</th></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
<tr><td>Pour calculer son aire, on calcule l'aire du grand triangle auquel on enlève un carré.
Son aire est donc
$$\frac{13 \times 5}{2} - 1 = 31{,}5$$</td><td>$$Aire_{Bleu} = \frac{5 \times 2}{2} = 5 \;\; ; \;\; Aire_{Orange} = \frac{8 \times 3}{2} = 12$$
Aire totale :
$$5 + 12 + 7 + 8 = 32$$</td></tr>
</table>

En calculant de deux façons différentes l'aire de cette figure, nous obtenons deux résultats différents, qui semblent les deux être justes.

L'erreur vient d'une illusion d'optique : les points A, B et C ne sont pas alignés.



En effet, en calculant la pente de A à B, on obtient :

$$\frac{2}{5} = 0{,}4$$

On calcule maintenant la pente entre B et C :

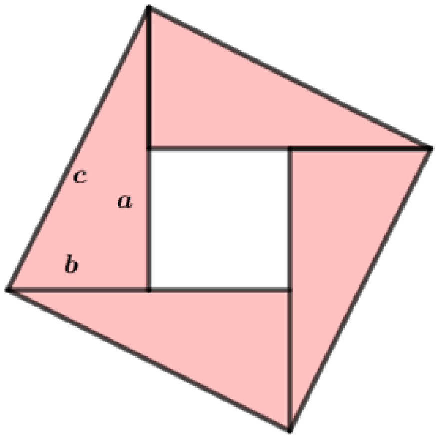
$$\frac{3}{8} = 0{,}375$$

Les deux pentes sont différentes, donc les points ne sont pas alignés, la première façon de calculer l'aire de cette forme considère que la figure est un triangle (moins un carré). Or ce n'est pas le cas.

On voit avec cet exemple, que les figures peuvent donner des idées mais on ne peut pas s'y fier totalement.

Partie 2 : Des outils pour aider à démontrer :

2.1/ Le théorème de Pythagore avec le calcul littéral :



L'aire du grand carré est égale à c^2

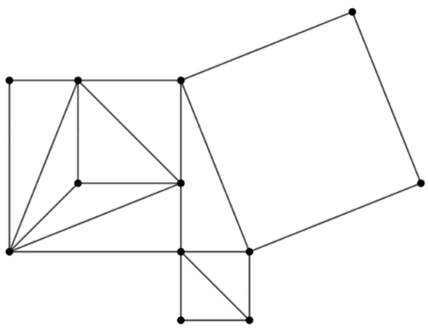
Le carré blanc a pour côté $a-b$, son aire est donc $(a-b)^2$

L'aire du grand carré est aussi égale à :
$4 \times Aire_{triangle} + Aire_{carré\ blanc}$

$$= 4 \times \frac{ab}{2} + (a-b)^2 = 2ab + a^2 - 2ab + b^2 = a^2 + b^2$$

On a bien démontré : $c^2 = a^2 + b^2$

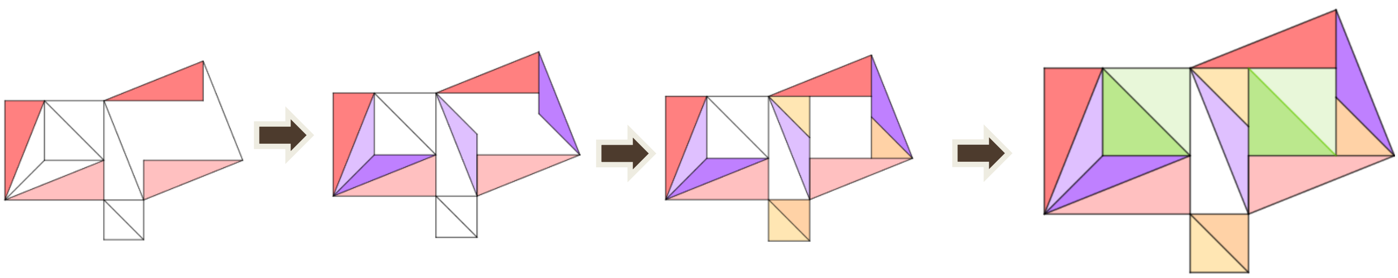
2.2/ calculs d'angles et de longueurs : une autre démonstration du théorème de Pythagore



On nous a proposé un puzzle afin de démontrer le théorème de Pythagore :

Il fallait recouvrir le grand carré en utilisant les triangles découpés dans les deux plus petits carrés.

Nous avons trouvé cet assemblage :

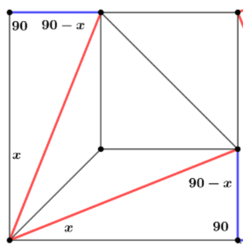


Comment être sûr que le puzzle remplit exactement le plus grand des carrés ?

Nous avons tout d'abord calculé les mesures des angles des triangles du carré de gauche :

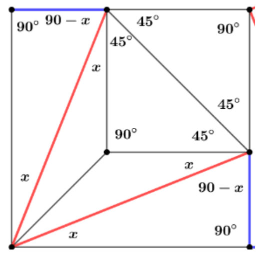
On appelle x la mesure d'un angle aigu du triangle rectangle.

Alors l'autre angle aigu a pour mesure $90 - x$

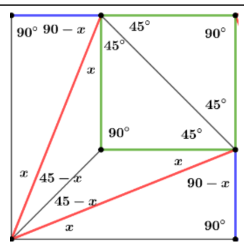


Les deux triangles isocèles rectangles ont des angles aigus de mesure 45°

Les droites parallèles permettent de démontrer que deux autres angles ont pour mesure x



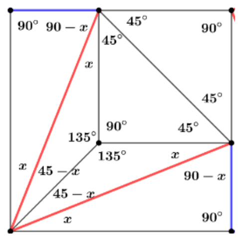
La bissectrice de l'angle droit (situé en bas à gauche) permet de dire que les deux angles ont pour mesure $45 - x$



On peut ainsi calculer la mesure des deux derniers angles :

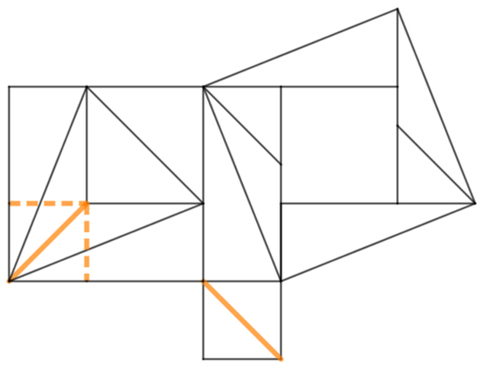
La somme des mesures des angles d'un triangle est égale à 180° donc

$$180 - x - (45 - x)$$
$$= 180 - x - 45 + x = 135$$

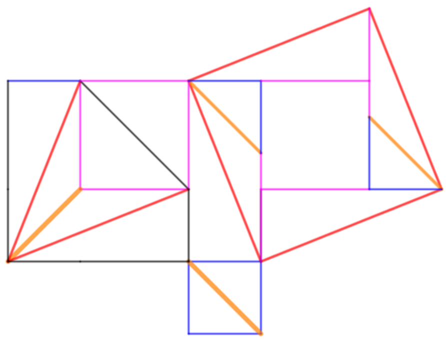


Si on étudie maintenant les longueurs des triangles des deux carrés :

On remarque que les segments oranges ont la même mesure.

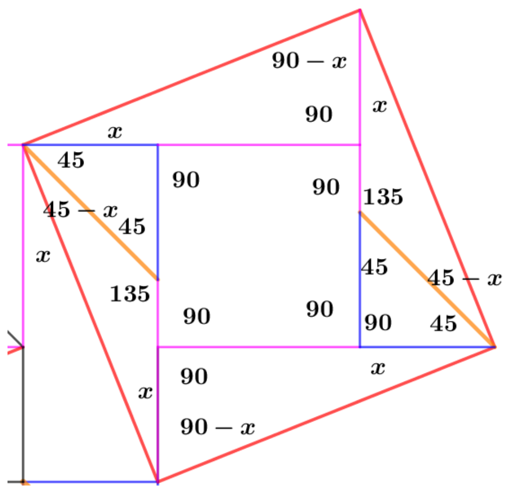


On se rend compte que les longueurs, dans le grand carré de droite coïncident.



Si maintenant, on observe les angles,

- On remarque que les quatre angles du carré rouge sont bien droits.
- Que les points sont bien alignés (135+45=180° et 90+90=180)

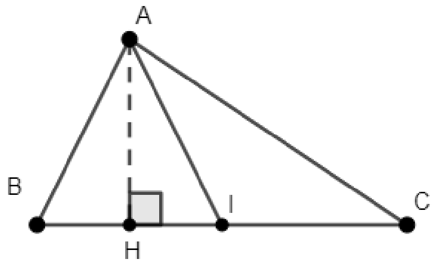


Donc on peut être sûr que le puzzle est exact, le carré de côté c est bien recouvert par les triangles formant les deux autres carrés.

2.3/ Les aires :

Rappel : l'aire d'un triangle est égale à $\frac{base \times hauteur}{2}$

> ***Théorème de la médiane :***
> Dans un triangle, une médiane le coupe en deux triangles de même aire.

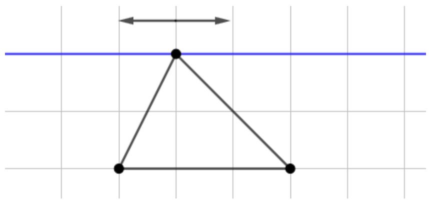


En effet l'aire du triangle ABI est : $\frac{BI \times AH}{2}$

L'aire du triangle AIC est : $\frac{IC \times AH}{2}$

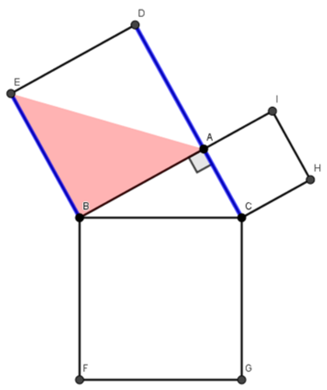
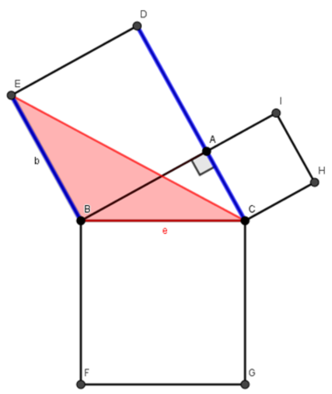
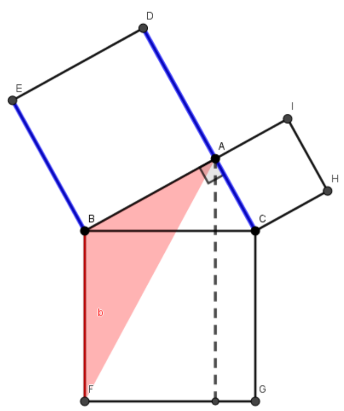
$Or \quad IC = IB$ donc les deux triangles ont même aire.

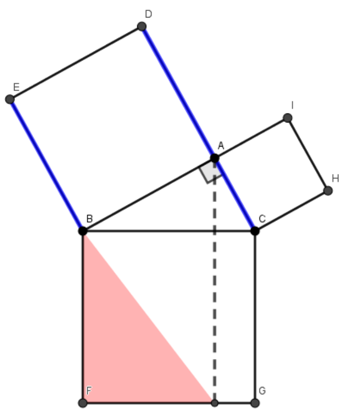
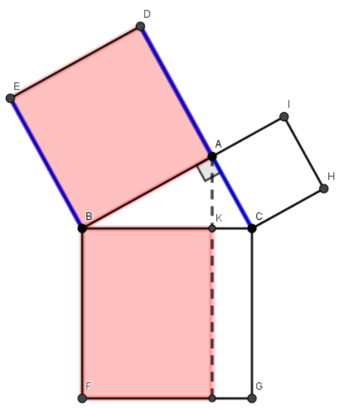
> ***« Théorème des mêmes aires » :***
> Un triangle dont le sommet se déplace sur une droite parallèle à la base conserve son aire.



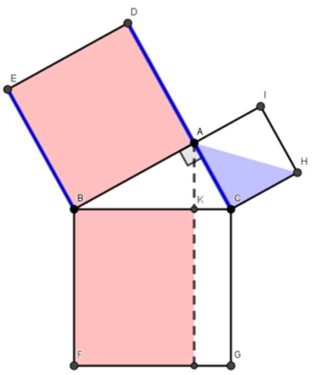
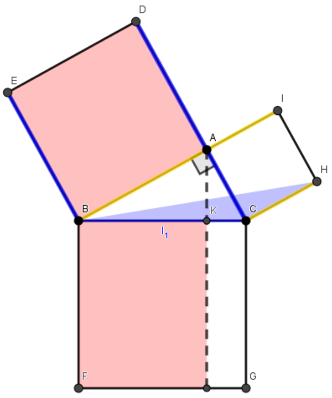
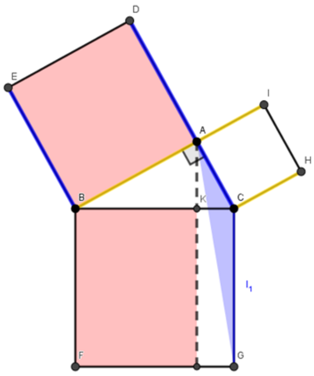
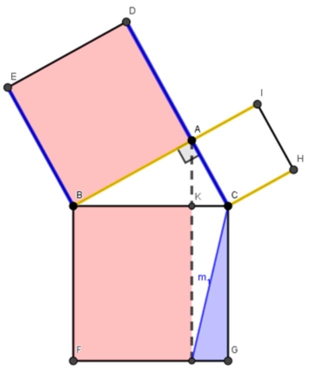
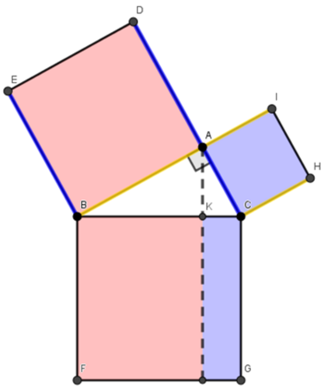
En effet, dans ce cas, la base et la hauteur sont conservées donc l'aire sera conservée.

2.4/ Démonstration du théorème de Pythagore en utilisant les aires :

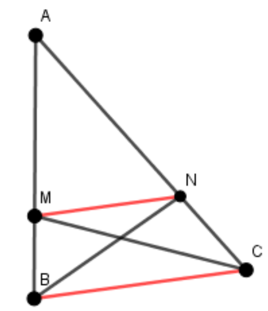
<table>
<tr><td colspan="2">Etape 1 :
$(DC)//(EB)$ donc les triangles ABE et EBC ont même aire</td><td>On effectue une rotation de centre B, on obtient le triangle ABF</td></tr>
<tr><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><td>On fait ensuite glisser le point A parallèlement à (BF), on obtient un triangle de même aire : BFG</td><td>Les triangles BFG et ABC ont même aire
Donc le carré ABCD et le rectangle BKIF ont même aire</td></tr>
<tr><td></td><td></td></tr>
</table>

On effectue les mêmes enchainements avec le triangle ACH :

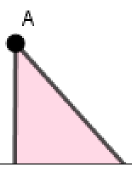
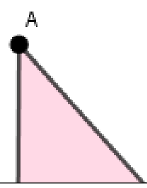
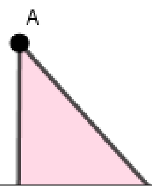
2.5/ Démonstration du théorème de Thalès en utilisant les aires :



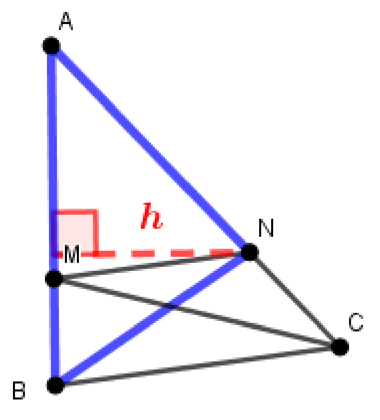
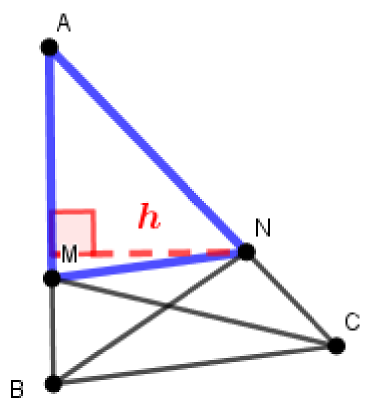
On sait que $(MN)// (BC)$

Le but est de démontrer que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$

La droite (MN) est parallèle à (BC) donc d'après le second théorème, les triangles MNB et MBC ont même aire.

On considère le triangle ANB que l'on coupe en deux triangles : AMN et MNB.	La droite (MN) est parallèle à (BC) donc d'après le second théorème, les triangles MNB et MBC ont même aire.	
		

Donc les triangles ABN et AMC ont même aire

		$\frac{aire\ (AMN)}{aire\ (ABN)}$ $= \frac{\frac{AM \times h}{2}}{\frac{AB \times h}{2}}$ $= \frac{AM \times h}{2} \times \frac{2}{AB \times h}$ $= \frac{AM}{AB}$
$Aire(ABN) = \frac{AB \times h}{2}$	$Aire(AMN) = \frac{AM \times h}{2}$	

On démontre de même que : $\frac{Aire(AMN)}{Aire\ (AMC)} = \frac{AN}{AC}$

Or on sait que les triangles AMC et ANB ont même aire, donc les deux fractions : $\frac{aire\ (AMN)}{aire\ (ANB)}$ et $\frac{aire\ (AMN)}{aire\ (AMC)}$ sont deux quotients égaux puisque leurs numérateurs sont identiques, ainsi que leurs dénominateurs.

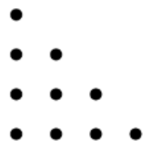
On en déduit que $\frac{AM}{AB} = \frac{AN}{AC}$.

Partie 3 : Des dessins pour calculer plus rapidement des sommes d'entiers :

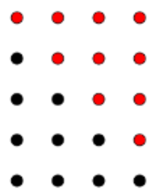
3.1/ Somme de "1 en 1" $\mathbf{1+2+3+4+\ldots}$

Nous avons essayé de représenter la somme d'entiers sous la forme de figures constituées de points.

Pour cette première somme, nous avons utilisé le triangle. Ainsi la somme $1+2+3+4$ est représentée par :



Un moyen rapide de calculer cette somme est de représenter à nouveau cette somme d'entier (en rouge).
La figure formée est un rectangle de côtés 4×5.



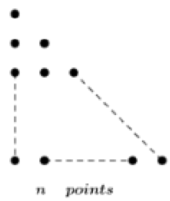
Pour calculer la somme d'entiers, il faut calculer le nombre de points dans le rectangle plus diviser le résultat par 2.

$$1 + 2 + 3 + 4 = \frac{4 \times 5}{2}$$

Nous sommes passés ensuite au cas général : calculer la somme des n premiers entiers : $1 + 2 + 3 + \dots + n$

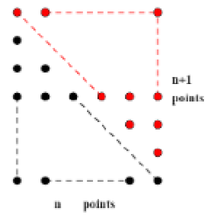
Le principe est le même :

On représente la somme d'entiers sous la forme d'un triangle, chaque ligne correspondant à un entier.



Nous représentons une nouvelle fois cette somme, on obtient un rectangle de dimensions

$$n \text{ et } n + 1$$



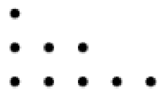
Le nombre de points du rectangle est $n(n + 1)$

Donc $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$

3.2/ Somme de « 2 en 2 » : $1 + 3 + 5 + \dots$

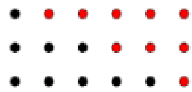
Premier exemple : $1 + 3 + 5$

Nous avons représenté de la même manière cette somme d'entiers : en forme de triangle, une ligne représentant un nombre.



On forme de nouveau un rectangle, en collant un même triangle (en rouge)

Les dimensions de ce rectangle sont 6 *et* 3



Donc $1 + 3 + 5 = \frac{6 \times 3}{2} = 9$

Nous avons ensuite étudié plusieurs autres exemples et sommes passés au cas général : $1 + 3 + 5 + 7 + \dots + n$

Nous avons remarqué que l'on ajoute 2 points d'une ligne à l'autre et donc :

$1 \quad + \quad 3 \quad + \quad 5 \quad + \quad 7 \quad + \dots$

Pouvait s'écrire de la forme :

$1 \quad + \quad (1 + 2 \times 1) \quad + \quad (1 + 2 \times 2) \quad + \quad (1 + 2 \times 3) \quad + \dots$

$1°terme + \quad 2°terme \quad + \quad 3°terme \quad + \quad 4°\ terme \quad + \dots$

Si le dernier terme de la somme est $1 + 2k$ alors il y a $(k + 1)$ termes dans la somme.

Donc

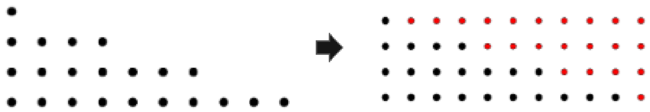
$$1 + (1 + 2 \times 1) + (1 + 2 \times 2) + (1 + 2 \times 3) + \dots + (1 + 2 \times k) = \frac{[(1 + 2k) + 1] \times (k + 1)}{2}$$

En essayant de réduire l'expression de droite :

$$\frac{[(1 + 2k) + 1] \times (k + 1)}{2} = \frac{(2k + 2)(k + 1)}{2} = \frac{2(k + 1)(k + 1)}{2} = (k + 1)^2$$

3.3/ *Somme de « 3 en 3 » :* $\mathbf{1+4+7+\ldots+n}$

Premier exemple : $\mathbf{1+4+7}$:



On procède de la même manière :
On ajoute 3 points d'une ligne à l'autre.
On en déduit que : $1+4+7=\frac{(10+1)\times 4}{2}=22$

Cas général :

$1 \quad + \quad 4 \quad + \quad 7 \quad + \quad 10 \quad + \ldots$

Pouvait s'écrire de la forme :

$1 \quad + \quad (1+3\times 1) \quad + \quad (1+3\times 2) \quad + \quad (1+3\times 3) \quad + \ldots$

$1°terme + \quad 2°terme \quad + \quad 3°terme \quad + \quad 4°\,terme \quad + \ldots$

Finalement :

$$1+(1+3\times 1)+(1+3\times 2)+(1+3\times 3)+\ldots+(1+3\times k)=\frac{[(1+3k)+1]\times(k+1)}{2}=\frac{(3k+2)(k+1)}{2}$$

3.4/ Cas général : « de a en a » :

En utilisant la même technique nous avons remarqué que le nombre de points en plus d'une ligne à l'autre est a.

La somme générale sera donc de la forme :

$$1+(1+a\times 1)+(1+a\times 2)+(1+a\times 3)+\ldots+(1+a\times k)=\frac{[(1+ak)+1]\times(k+1)}{2}=\frac{(ak+2)(k+1)}{2}$$

En conclusion, Les dessins aident à la recherche et à trouver une idée. Ils permettent de mieux comprendre. Seulement, ils peuvent tromper.
Les démonstrations, quant à elles, permettent de s'assurer du résultat. C'est une preuve.