

Déplacement d'une particule sur une grille

Année 2024 – 2025

Lubna Gautier, Maëline Banet, Augustine Florens, Martin Raffit ; Gwenaël Samouelian et Ambre Darribeau (rédacteurs de l'article)

Établissement : Collège Aretha Franklin de Marciac.

Enseignant-e(s) : Christophe Pignon, Edelyne Olympe

Chercheur : Stéphane Blanco.

1. Introduction : présentation du sujet

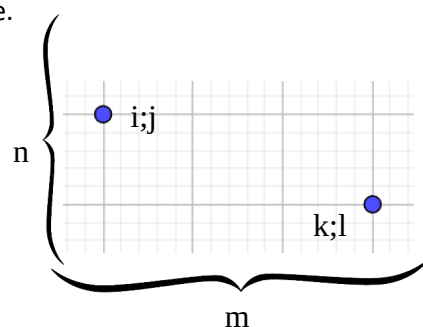
Contexte :

Considérons une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Un chemin aléatoire qui suit les segments de la grille est initié à partir d'un nœud spécifiquement situé en (i, j) dans la grille.

Problématique :

Quelle est la probabilité qu'un chemin démarrant au nœud (i, j) atteigne un bord de la grille au nœud (k, l) via un chemin aléatoire en sachant qu'il s'arrête lorsqu'il touche un bord ?

On suppose qu'il y a équiprobabilité des 4 directions.



2. Démarches

2.1 Première grille :

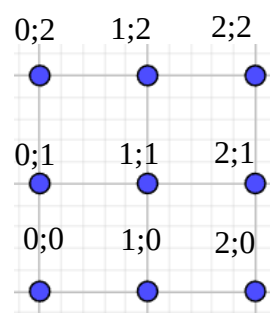
On prend la grille ci-contre, avec un seul point central et 8 au bord.

Dans cette grille, on ne peut partir que du point 1;1 car c'est le seul qui n'est pas au bord.

La particule peut aller en haut, à droite, en bas ou encore à gauche (pas dans les coins).

Il y a équiprobabilité entre ces 4 issues. Il y a donc 1 chance sur 4 pour chacune d'entre elles.

S'arrêtant au bord, la particule ne peut pas aller dans les angles de la grille.



Pour cette grille, on a donc répondu à la question :

La probabilité que la particule finisse en un point particulier d'un bord est de $\frac{1}{4}$. (1)

2.2 Deuxième grille :

On prend 2 points centraux, et des points sur les bords.

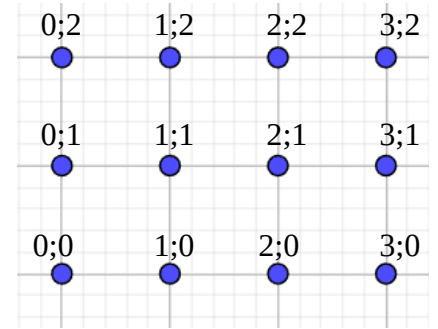
La particule peut partir des points 1;1 ou 2;1.

Définition :

On appelle « pas » un segment de la grille dont les extrémités sont deux points adjacents de la grille (sauf en diagonale).

Lorsque la particule est à un point de la grille, la probabilité qu'elle aille dans une direction donnée est de $\frac{1}{4}$ (cf 2.1). Cela est valable pour chaque point de la grille.

Donc la probabilité que la particule parcoure un chemin particulier à n pas est de $\left(\frac{1}{4}\right)^n$.



Nombre de chemins à n pas :

Exemple : la particule part de 1;1 et va en 2;2.

Le chemin le plus court a donc 2 pas minimum (1;1 → 2;1 → 2;2)

Pour les chemins plus longs, la seule possibilité est de faire un aller-retour entre 1;1 et 2;1 (sinon la particule va sur un bord et s'arrête). Donc les autres chemins auront un nombre pair de pas de plus que le chemin le plus court.

Exemple : 1;1 → 2;1 → 1;1 → 2;1 → 2;2 : 4 pas

ou 1;1 → 2;1 → 1;1 → 2;1 → 1;1 → 2;1 → 2;2 : 6 pas

Cette propriété est vraie pour toutes les autres grilles avec le même raisonnement (si la particule « s'éloigne » du point qu'elle veut atteindre, elle doit revenir pour compenser et donc faire 2 pas) :

Propriété :

Le nombre de pas nécessaires pour aller d'un point à l'intérieur de la grille à un point du bord a la même parité que le nombre de pas minimum nécessaires pour relier ces deux points.

Donc, la probabilité que la particule aille d'un point central à un point du bord est égale à la somme des produits de $\left(\frac{1}{4}\right)^n$ par le nombre de chemins à n pas (pour n allant de m à l'infini. m étant le nombre de pas du chemin le plus court possible. Et n a la même parité que m). (2)

Autrement dit, propriété (1) :

D un point de départ, et A un point du bord de la grille :

$$P(D \rightarrow A) = \sum_{n=1 \text{ et } n \text{ impair}}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \text{nb de chemins à } n \text{ pas}$$

ou

$$P(D \rightarrow A) = \sum_{n=2 \text{ et } n \text{ pair}}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \times \text{nb de chemins à } n \text{ pas}$$

Remarque : dans la première formule on commence avec $n=1$ et non $n=m$. Cela ne change rien au résultat de la somme, puisque si $m>1$, alors le nombre de chemin à 1 pas sera nul, donc le produit aussi. Et de même pour tous les entiers impairs $< m$.

Même chose pour la deuxième formule pour le cas pair.

On cherche donc les probabilités suivantes pour cette grille :

$P(1;1 \rightarrow 0;1), P(1;1 \rightarrow 1;2), P(1;1 \rightarrow 2;2), P(1;1 \rightarrow 3;1), P(1;1 \rightarrow 2;0), P(1;1 \rightarrow 1;0)$

et :

$P(2;1 \rightarrow 0;1), P(2;1 \rightarrow 1;2), P(2;1 \rightarrow 2;2), P(2;1 \rightarrow 3;1), P(2;1 \rightarrow 2;0), P(2;1 \rightarrow 1;0)$

Lorsque le nombre de pas minimum est le même, alors les probabilités sont égales. On a donc :

$P(1;1 \rightarrow 0;1)=P(1;1 \rightarrow 1;0)=P(1;1 \rightarrow 1;2)$ avec un chemin d'au minimum 1 pas.

et

$P(1;1 \rightarrow 2;2)=P(1;1 \rightarrow 3;1)=P(1;1 \rightarrow 2;0)$ avec un chemin d'au minimum 2 pas.

Et par symétrie on a :

$P(1;1 \rightarrow 0;1)=P(1;1 \rightarrow 1;0)=P(1;1 \rightarrow 1;2)=P(2;1 \rightarrow 2;2)=P(2;1 \rightarrow 3;1)=P(2;1 \rightarrow 2;0)$ (3)

Cas particulier : sur cette grille, pour n donné, le nombre de chemins à n pas est toujours de 1. On cherche donc, pour les chemins à 1 pas minimum (donc à un nombre impair de pas) :

$$\begin{aligned} P(1;1 \rightarrow 0;1) &= P(1;1 \rightarrow 1;0) = P(1;1 \rightarrow 1;2) = P(\text{chemin à pas impair}) = \sum_{n=1 \text{ et } n \text{ impair}}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ &= \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \left(\frac{1}{4}\right)^7 + \dots \end{aligned}$$

Détail du calcul :

$$4^2 \times P(\text{chemin à pas impair}) = 4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^1 + 4^2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^5 + 4 \times \left(\frac{1}{4}\right)^7 + \dots$$

Donc :

$$4^2 \times P(\text{chemin à pas impair}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{1-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{3-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{5-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^{7-2} + \dots$$

Donc :

$$4^2 \times P(\text{chemin à pas impair}) = \left(\frac{1}{4}\right)^{-1} + \left(\frac{1}{4}\right)^1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 + \left(\frac{1}{4}\right)^5 + \dots$$

Donc :

$$4^2 \times P(\text{chemin à pas impair}) = 4 + P(\text{chemin à pas impair})$$

Donc :

$$16 \times P(\text{chemin à pas impair}) - P(\text{chemin à pas impair}) = 4$$

Donc :

$$15 \times P(\text{chemin à pas impair}) = 4$$

Donc :

$$P(\text{chemin à pas impair}) = \frac{4}{15}$$

Et on cherche aussi :

$$P(1;1 \rightarrow 2;2) = P(1;1 \rightarrow 3;1) = P(1;1 \rightarrow 2;0) = P(\text{chemin à pas pair}) = \sum_{n=2 \text{ et } n \text{ pair}}^{\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

$$= \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^4 + \left(\frac{1}{4}\right)^6 + \left(\frac{1}{4}\right)^8 + \dots$$

Et par la même technique que précédemment, on trouve alors :

$$P(\text{chemin à pas pair}) = \frac{1}{15}$$

Pour cette grille, on a donc répondu à la question avec :

- La probabilité que la particule sorte par un des points situés à 1 pas minimum de son point de départ est de $\frac{4}{15}$.
- La probabilité que la particule sorte par un des points situés à 2 pas minimum de son point de départ est de $\frac{1}{15}$

Remarque : la somme des probabilités lorsque la particule part d'un point donné vaut bien 1 :

$$P(1;1 \rightarrow 0;1) + P(1;1 \rightarrow 1;2) + P(1;1 \rightarrow 2;2) + P(1;1 \rightarrow 3;1) + P(1;1 \rightarrow 2;0) + P(1;1 \rightarrow 1;0)$$

$$= \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{4}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} + \frac{1}{15} = \frac{15}{15} = 1 \quad (4)$$

2.3 Troisième grille :

On prend cette fois une grille avec 4 points centraux :

Dans la suite, la particule part de D et arrive sur un des points du bord, par exemple A.

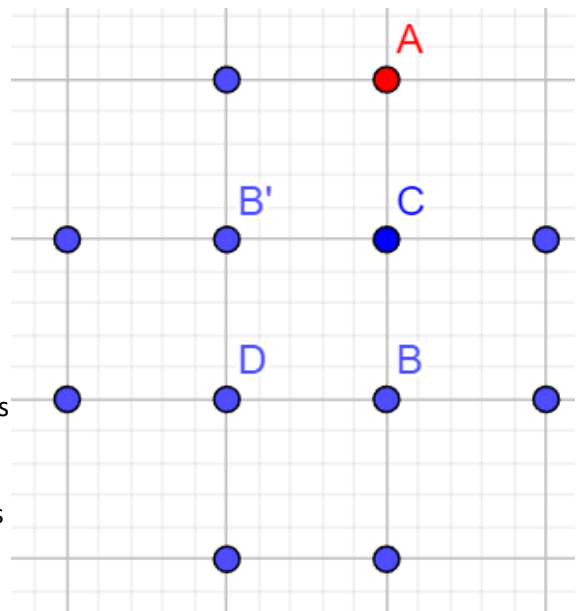
Par symétrie, les résultats seront les mêmes lorsqu'elle partira d'un des trois autres points centraux.

Dans cette grille, pour n donné, le nombre de chemin à n pas ne vaut plus forcément 1. Il y a plusieurs possibilités.

Donc, pour n donné, il faut trouver le nombre de chemins possibles à n pas.

Par exemple, si n=7, combien y a-t-il de chemins possibles en 7 pas pour aller de D à A ?

Au départ nous faisons des dessins pour chaque chemin mais c'était fastidieux et nous n'étions jamais certains d'avoir le bon nombre de chemins.



Pour trouver le nombre de chemins en un certain nombre de pas nous avons donné un nom à chaque point de la grille.

On notera donc ainsi un chemin en 7 pas lorsque la particule part de D et sort en A :

DBDB'DB'CA

Les lettres en rouge ne changent pas puisque c'est le départ et l'arrivée.

Les lettres en vert peuvent se changer chacune par leur symétrique.

En effet, lorsque la particule est en D ou C, elle peut aller soit en B soit en B' (sinon elle sort de la grille). Lorsque la particule est en B ou en B', alors elle peut aller soit en C soit en D.

Donc B peut devenir B' et l'inverse et D peut devenir C et l'inverse.

Exemple :

DBDB'DB'CA

B'CBCB

On peut remplacer chaque lettre en vert par son symétrique ce qui donne 2 possibilités de chemin de plus par lettre verte.

DBDBCBCA

x2x2x2x2x2

Donc le nombre de chemins possibles en 7 pas pour aller de D à A est 2^5 .

On peut étendre cette constatation à n'importe quel nombre de pas : pour n donné, un chemin à n pas pourra s'écrire avec n+1 lettres :

La 1^{er} lettre sera rouge (point de départ).

Les n-2 lettres centrales seront vertes (points centraux)

Les deux dernières lettres seront rouges (le dernier pas pour sortir de la grille).

Chaque lettre verte a 2 possibilités. On en déduit la propriété suivante :

Propriété (2) : dans cette grille, avec n entier :

Pour n=1, le nombre de chemins à 1 pas vaut 1.

Pour n > 1, le nombre de chemins à n pas est de 2^{n-2}

Exemple d'un chemin : DBDB'CB'DBDB'CA. Ce chemin a donc 11 pas.

Il y a 2^9 chemins possibles à 11 pas !

Calcul des probabilités :

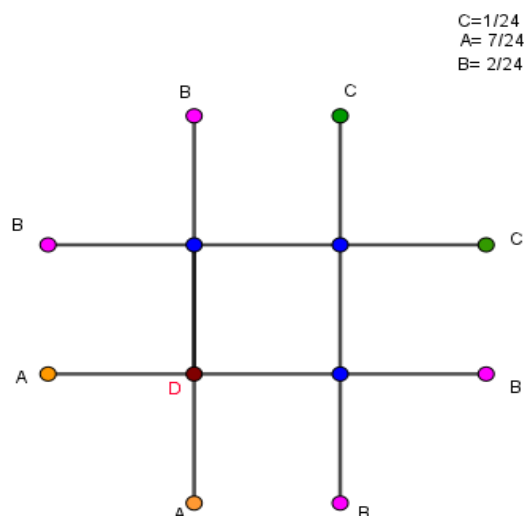
En partant de D :

Par symétrie, les points A auront la même probabilité (chemin à 1 pas minimum), les points B la même (chemin à 2 pas minimum) et les points C la même (chemin à 3 pas minimum).

Par symétrie également, si D est un des 3 autres points centraux (en bleu ci-contre), les probabilités seront les mêmes mais « décalées ».

Dans la suite on considère qu'on part de D.

Avec les propriétés (1) et (2) on obtient donc la somme suivante :



$$P(D \rightarrow A) = \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times 1 + \left(\frac{1}{4}\right)^3 \times 2^{3-2} + \left(\frac{1}{4}\right)^5 \times 2^{5-2} + \dots + \left(\frac{1}{4}\right)^n \times 2^{n-2} + \dots$$

$$\Leftrightarrow P(D \rightarrow A) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^6} \times 2^1 + \frac{1}{2^{10}} \times 2^3 + \dots + \frac{1}{2^{2n}} \times 2^{n-2} + \dots$$

$$\Leftrightarrow P(D \rightarrow A) = 2^{-2} + 2^{-5} + 2^{-7} + \dots + 2^{-n-2} + \dots$$

Donc en multipliant par 2^2 :

$$2^2 \times P(D \rightarrow A) = 2^2 \times 2^{-2} + 2^2 \times 2^{-5} + 2^2 \times 2^{-7} + \dots + 2^2 \times 2^{-n-2} + \dots$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \times P(D \rightarrow A) = 2^0 + 2^{-3} + 2^{-5} + \dots + 2^{-n} + \dots$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \times P(D \rightarrow A) = 2^0 + 2^{-3} - 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-5} + \dots + 2^{-n} + \dots$$

On reconnaît alors $P(D \rightarrow A)$ en bleu :

$$\Leftrightarrow 2^2 \times P(D \rightarrow A) = 2^0 + 2^{-3} - 2^{-2} + 2^{-2} + 2^{-5} + \dots + 2^{-n} + \dots$$

$$\Leftrightarrow 2^2 \times P(D \rightarrow A) = 1 + \frac{1}{8} - \frac{1}{4} + P(D \rightarrow A)$$

$$\Leftrightarrow 4 \times P(D \rightarrow A) - P(D \rightarrow A) = \frac{8}{8} + \frac{1}{8} - \frac{2}{8}$$

$$\Leftrightarrow 3 \times P(D \rightarrow A) = \frac{7}{8}$$

$$\Leftrightarrow P(D \rightarrow A) = \frac{\frac{7}{8}}{3} = \frac{7}{8} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{24}$$

En procédant de même pour les autres points on trouve :

$$P(D \rightarrow B) = \frac{2}{24}$$

$$P(D \rightarrow C) = \frac{1}{24}$$

Pour cette grille, on a donc répondu à la question avec :

- La probabilité que la particule sorte par un des points situés à 1 pas minimum de son point de départ est de $\frac{7}{24}$.

- La probabilité que la particule sorte par un des points situés à 2 pas minimum de son point de départ est de $\frac{2}{24}$

- La probabilité que la particule sorte par un des points situés à 3 pas minimum de son point de départ est de $\frac{1}{24}$

Remarque : la somme des probabilités lorsque la particule part d'un point donné vaut bien 1 :

$$2 \times P(D \rightarrow A) + 4 \times P(D \rightarrow B) + 2 \times P(D \rightarrow C) = 2 \times \frac{7}{24} + 4 \times \frac{2}{24} + 2 \times \frac{1}{24} = \frac{14}{24} + \frac{8}{24} + \frac{2}{24} = 1$$

3. Approximations

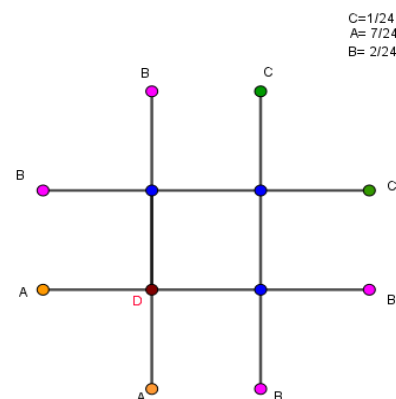
On cherche si en calculant seulement le 1^{er} terme de la somme on trouve un résultat proche de la somme totale, et le pourcentage d'erreur entre le résultat du premier terme et de la somme totale.

On reprend les mêmes notations qu'au 2.3.

$$P(D \rightarrow A) = \frac{7}{24}$$

Avec le premier terme seulement :

$$P(D \rightarrow A) \approx \left(\frac{1}{4}\right)^1 \times 1 = 0,25$$



	Valeur exacte	Premier terme
Pourcentage	100	85,7143
$P(D \rightarrow A)$	7/24	0,25

Est proportionnel.

Donc la valeur de $P(D \rightarrow A)$ est à 85 % celle de son premier terme. (5)

On fait de même pour les autres :

	Valeur exacte	Premier terme
Pourcentage	100	75
$P(D \rightarrow B)$	2/24	$(1/4)^2 = 0,0625$

Donc la valeur de $P(D \rightarrow B)$ est à 75 % celle de son premier terme.

	Valeur exacte	Premier terme
Pourcentage	100	75
$P(D \rightarrow C)$	1/24	$(1/4)^3 \times 2 = 0,03125$

Donc la valeur de $P(D \rightarrow C)$ est à 75 % celle de son premier terme.

On pourrait appliquer ces pourcentages lors des calculs des probabilités dans d'autres grilles. Si on parvenait à calculer le premier terme, alors en appliquant le pourcentage, on pourrait en déduire une approximation de la probabilité exacte.

Cependant il resterait à savoir si le pourcentage est toujours à peu près le même. Et on voit sur nos exemples que non, puisque le premier vaut 85 % et les autres 75 %.

4. Conclusion et extension

Nous n'avons trouvé des résultats que sur ces 3 exemples de grilles.
Sur ces trois grilles nos résultats sont exacts.

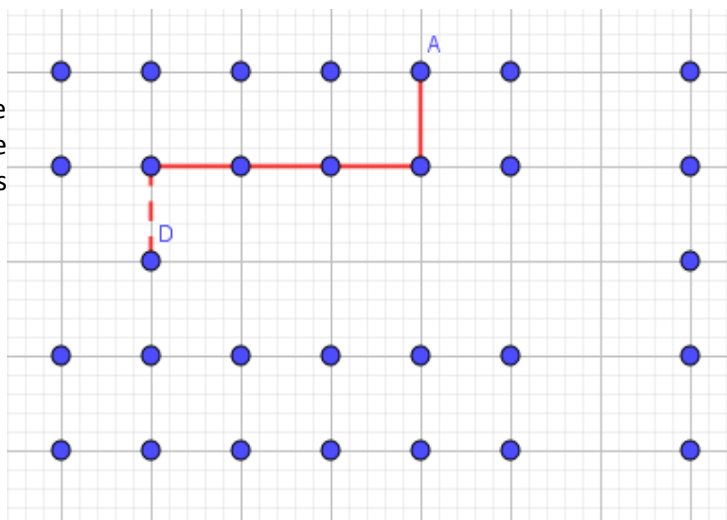
Pour la généralisation à des grilles de taille quelconque, nous avons été confrontés à un problème pour calculer le nombre de chemins possibles en n pas, avec n donné.

Nous savons calculer le nombre de pas minimum nécessaires pour aller d'un point D à un point A : il suffit d'additionner le nombre de pas en vertical et en horizontal nécessaires pour aller de D à A.

Exemple ici :

2 vertical + 3 horizontal = 5 pas au minimum.

Mais nous n'avons pas réussi à trouver le nombre de chemins possibles avec ce nombre minimum de pas, malgré quelques tentatives avec des formules et les coordonnées.



Si nous avions réussi, nous pensions alors appliquer nos pourcentages d'erreur pour avoir une approximation de la probabilité $P(D \rightarrow A)$.

5. Annexe

Notre chercheur Stéphane Blanco nous a expliqué le contexte précis de ce sujet, sur lequel il travaille lui même :

« Depuis quelques années, les questions liées au premier passage à la frontière pour une particule qui effectue une marche aléatoire occupent une place de plus en plus importante dans la recherche scientifique. Ces problèmes apparaissent aussi bien en physique, en mathématiques qu'en ingénierie, car ils permettent de modéliser des phénomènes variés et souvent complexes.

Traditionnellement, de nombreux phénomènes physiques sont décrits par des équations déterministes, comme les équations de la chaleur pour la température dans un solide. Cependant, les

chercheurs ont découvert qu'il est parfois possible de reformuler ces problèmes sous une forme probabiliste rigoureuse, grâce aux marches aléatoires ou aux mouvements browniens. Cela signifie qu'un problème difficile à résoudre avec des équations différentielles peut être remplacé par l'étude du trajet d'une particule se déplaçant au hasard, ce qui offre une autre manière de comprendre et de calculer.

Par exemple, imaginons qu'on souhaite connaître la température en un point précis à l'intérieur d'un solide en régime stationnaire, en connaissant uniquement les températures fixées sur la surface. Il est possible de montrer que l'on peut obtenir la température recherchée en faisant partir un grand nombre de particules au hasard depuis ce point. En notant la température qu'elles rencontrent lorsqu'elles atteignent pour la première fois la frontière, puis en prenant la moyenne, on retrouve la température initialement cherchée. Ainsi, on relie un problème purement déterministe à une méthode probabiliste. Cela revient donc, en réalité, à devoir calculer les probabilités d'atterrir sur chacun des nœuds du bord, car ce sont ces probabilités qui pondèrent la contribution des températures imposées sur la frontière.

Cette manière de raisonner est puissante et élégante, car elle montre que des phénomènes complexes peuvent parfois se comprendre à partir du hasard et des probabilités. Elle ouvre aussi la voie à des simulations numériques qui permettent d'approximer les résultats, même quand les calculs exacts sont trop difficiles.

Dans notre projet de Math en Jeans, nous allons nous intéresser à ces idées. Nous allons explorer comment des particules qui se déplacent au hasard peuvent nous renseigner sur des questions physiques ou mathématiques très concrètes. Nous allons étudier des marches aléatoires où, à chaque étape, la particule choisit uniformément au hasard l'une des directions possibles, sur des réseaux quadrillés. Nous chercherons à calculer ou estimer les probabilités qu'une particule, partant d'un point du réseau situé dans le milieu, atteigne tel ou tel nœud du réseau au bord. »

Stéphane Blanco

Notes d'édition :

- (1) Précisons que cette probabilité est celle pour un point du bord qui n'est pas un coin ; celle d'atteindre un coin est nulle.
- (2) Le texte n'est pas très clair : la sommation est étendue à tous les indices n de même parité que m , de m à l'infini. Par exemple si $m=1$ on sommerait sur tous les n impairs, donc de la forme $2k+1$.
- (3) Ce passage n'est pas très clair et est incomplet. Les auteurs veulent dire que ce qui est calculé pour le point 1;1 relativement à ses voisins à 1 pas ou à 2 pas est encore valable pour le point 2;1 vis à vis de ses voisins à même distance. La suite d'égalités écrite dans le texte ne le donne que pour les voisins à un pas.
- (4) Même remarque qu'à la note (1), la probabilité de sortir à un coin est nulle. Nous ne répéterons pas cette précision encore valable lors de la conclusion de l'étude de la troisième grille.
- (5) Mal dit : c'est plutôt l'inverse. En effet, le premier terme de la somme représente 85 % de la somme totale donnant la probabilité d'aller de D à A. Même chose pour les deux autres cas.