Des plis qui se déplient

Année 2022 – 2023

Fleurit Valentin, Horion Arthur , élèves de classe Terminale

Établissement(s) : Lycée Polyvalent Léonce Vieljeux

Encadré·es par : Mme Biton et Mr Vederine

Chercheur·Chercheuse(s) : Mr Ospel, Université de La Rochelle.

1 Présentation du sujet

On plie une bande de papier toujours dans le même sens, n fois. On déplie ensuite le pliage obtenu et dispose les plis de façon à former des angles droits dans le sens où ils ont été pliés. On s'intéresse à la figure obtenue lorsque l'on regarde le pliage de côté.

On cherche:

- Le nombre de segments de la figure obtenue
- Les dimensions de la grille dans laquelle la figure obtenue peut tenir (on prend comme unité de la grille la longueur des segments de la figure)

2 Taille de la figure

2.1.1 Nombre de segment

Pour chaque nouveau pliage, on plie chaque segment en deux. Le nombre de segment est donc doublé à chaque pliage, il y a donc: 2^n segments. La démonstration est trivial et laissée au lecteur.

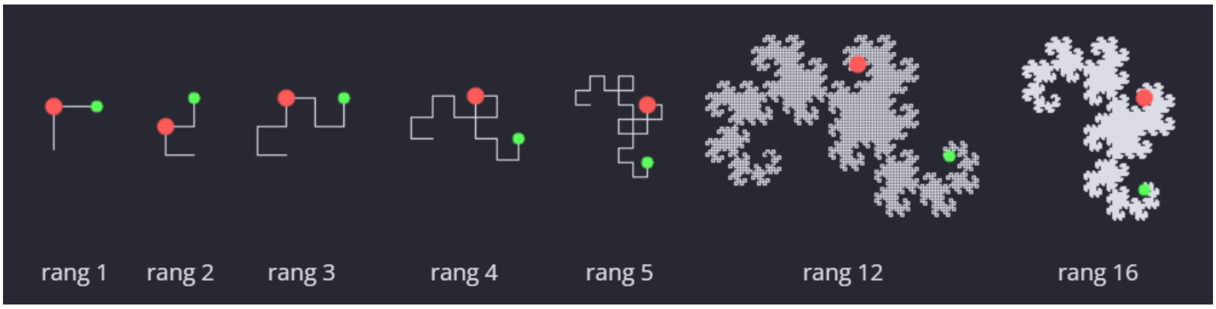
2.1.2 Dimensions

Nous avons remarqué que la figure à un rang $n+1$ est composée de la figure au rang précédent n, répétée deux fois en partant du même point mais avec un angle droit à la jointure (voir images plus bas). Il s’agit donc d’une figure géométrique évoluant par reproduction et assemblage d’une forme héritée de la figure à l’état précédent. C’est ce qu’on appelle une fractale.

Nous avons ensuite choisi de représenter les angles de la figure sous la forme d'une liste de 0 et de 1: 0 et 1 correspondant à un angle dans un sens et dans l'autre. Cette liste est définie par une fonction de récurrence telle que: `A(n+1) = join(inv(A(n)), [0], A(n))`. Où inv(liste) est une fonction qui inverse l'ordre des éléments de la liste et qui remplace les 0 par des 1 et les 1 par des 0 (exemple: `inv([1, 0, 1, 1]) = [0, 0, 1, 0]` et `join(listes)` une fonction qui créé une nouvelle liste issue des listes données.

Les listes obtenues (en partant du rang $n=1$) sont donc: `[0]`, `[1, 0, 0]`, `[1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]`, `[1, 1, 0, 1, 1, 0, 0, 0, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0]`, ...

Nous avons donc créé un programme en python puis un simulateur en ligne sur le même principe permettant de trouver la figure à un rang n. Voici les figures obtenues pour certains rangs donnés:



Sur les images, le point rouge représente les points de jonction entre les deux figures au rang n qui forme la figure au rang $n+1$.

La figure semble former une fractale qui se précise de plus en plus lorsque l'on augmente le nombre de pliages n.

À l'aide du programme nous avons pu mesurer les dimensions de la figure pour certains rangs, par exemple en partant du rang $n=1$ on a une figure de dimensions: 1/1, 1/2, 2/3, 3/5, 6/7, ...

Après observation des figures au rangs pairs et impairs, en superposant quelques une de ces figures, nous avons remarqué que:

- Pour passer d'un rang pair n au suivant $n+2$, on a:
  - $l_{n+1}=l_n\times 2+1 \, et \, L_{n+1}=L_n\times 2+1$ (l et la longueur et L est la largeur de la figure)
- Pour passer d'un rang impair au suivant, une fois sur deux, on a:
  - $l_{n+1}=l_n\times 2 \, et \, L_{n+1}=L_n\times 2+1 \, puis \, l_{n+1}=l_n\times 2+2 \, et \, L_{n+1}=L_n\times 2+1$

Nous avons ensuite décidé d'écrire l et L sous la forme d'une matrice: $\begin{pmatrix} l \\ L \end{pmatrix}$

3 Conclusion

Nous arrivons donc à l’expression des réponses.

Le nombre de segments pour n pliages est obtenu selon : $S_n=2^n$

Nous avons aussi représenté les dimensions de la figure selon deux suites :

- celle au rangs paires $\begin{cases} P_2=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \\ P_{n+2}=2P_n+\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \end{cases}$
- celle au rang impaire $\begin{cases} I_1=\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \\ I_{n+2}=\begin{cases} 2I_n+\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} si\, n\equiv 3[4] \\ 2I_n+\begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} si\, n\equiv 1[4] \end{cases} \end{cases}$

Ces deux dernières formules sont de simples conjectures.