EVOLUTION D'UNE POPULATION ANIMALE

BOULKHIR YASSIN, MARTIN ETHAN, MARTIN KENAN, COLOME LAURYNE ET BOUDACHE ZAKARI, classe de Première et Terminale

Année 2022-2023

Établissement(s) : Lycée Jean-Baptiste Dumas (Alès)
Enseignant·e(s) : Laferte Loic, Maurin Laurent
Chercheur·Chercheuse(s) : Dumont Serge, Université de Nimes

Table des matières

1 Présentation du sujet

Nous nous proposons d'étudier l'évolution de couples d'animaux. Les hypothèses sont les suivantes. A chaque pas de temps n, nous supposons que :
— Chaque couple d'enfants du pas précédent devient un couple d'adultes ;
— Chaque couple d'adultes du pas précédent a un couple d'enfants.

Le cas le plus standard consiste à démarrer avec un seul couple d'enfants.

2 Résultats et notations

2.1 Résultats

Nous allons étudier ce problème en trois étapes. Dans un premier temps, nous allons s'intéresser au cas plus simple avec deux générations et un taux de mortalité nul. Ensuite, nous allons voir un cas spécifique avec trois générations et un taux de mortalité de 50%. Enfin, nous allons généraliser cela avec un nombre arbitraire k de générations et un coefficient de mortalité χ.

2.2 Notations

Pour la suite du problème, nous allons définir les notations suivantes :

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans $\mathbb{R}$;
- $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite caractérisant l'effectif total d'individus à chaque instant n;
- $(\eta_n^k)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite caractérisant l'effectif total d'individus faisant partie de la k-ème génération avec $k \in I = \{0, \dots, \kappa\}$ où $\kappa = \max_{k\in I} k$;
- χ est le coefficient de mortalité;
- $\Gamma(\chi)$ est la matrice introduite à la page 11 qui dépend de χ;
- $\Lambda_n^{(\kappa)}$ est le vecteur ayant comme coordonnées les $\eta_n^0, \dots, \eta_n^\kappa$;

3 Evolution d'une population animale

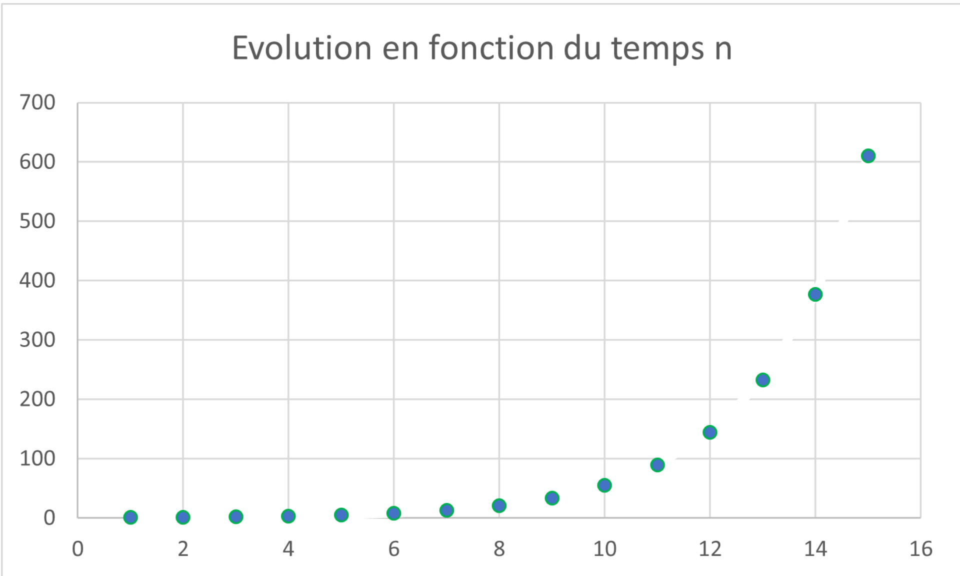
3.1 Modélisation de l'évolution de la population

3.1.1 Première approche

Commençons par un exemple :
A $n = 0$, nous avons donc un couple d'enfants. Au pas de temps suivant, à $n = 1$, le couple d'enfants devient un couple d'adultes. Ensuite, au pas de temps suivant, à $n = 2$, le couple d'adultes fait un couple d'enfants et demeure en vie. A $n = 3$, le couple d'enfants devient un couple d'adultes, le couple d'adultes fait un couple d'enfants et demeure en vie, puis on continue ainsi.
Voici un exemple pour $n = 15$.

n	***Enfants***	***Adultes***	***Total***
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89
11	55	89	144
12	89	144	233
13	144	233	377
14	233	377	610
15	377	610	987

Nous constatons qu'à chaque pas de temps $n \geq 2$, l'effectif total d'individus est égal à la somme des effectifs totaux d'individus des deux pas de temps précédents.
Ci-contre, nous proposons un graphique décrivant l'évolution de la population en fonction de n.



Nous remarquons aussi que la population croît de manière exponentielle.

3.1.2 Modélisation sous forme d'une suite

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite caractérisant l'effectif total d'individus à chaque pas de temps n. Alors de la même manière :

	Enfants	***Adultes***	***Total***
u_n	a	b	$a+b$
u_{n+1}	b	$a+b$	$a+2b$
u_{n+2}	$a+b$	$a+2b$	$2a+3b$

Nous pouvons en déduire cette relation de récurrence :

$$\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n} \tag{1}$$

car $u_{n+2} = 2a+3b$ et $u_n + u_{n+1} = (a+b)+(a+2b) = 2a+3b$ donc nous avons bien l'égalité.

3.1.3 Analyse de la suite

n	u_n	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	1.5
4	5	1.666666667
5	8	1.6
6	13	1.625
7	21	1.615384615
8	34	1.619047619
9	55	1.617647059
10	89	1.618181818
11	144	1.617977528
12	233	1.618055556
13	377	1.618025751
14	610	1.618037135

En analysant la suite avec un logiciel, nous pouvons faire deux conjectures :
- La suite (u_n) semble être croissante.
- Le rapport entre deux termes consécutifs semble se stabiliser vers 1.6.

Démonstration Montrons que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. D'après la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Ainsi $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$. La différence entre deux termes successifs est donc égale au terme qui les précède. Montrons alors que $u_n > 0$ pour tout n. De plus, dans ce modèle, nous allons toujours considérer que les premiers deux termes de la suite sont strictement positifs.

Soit la propriété $P(n)$ = "$u_n > 0$".

Initialisation :
Vérifions que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1 :
En effet, $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ par hypothèse.

Hérédité :
Soit la propriété $P(n)$ vraie aux rangs n et $n+1$, montrons qu'elle est vraie au rang $n+2$.
La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie par $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$. Or $u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $u_{n+2} > 0$. Ainsi $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion L'initialisation est vérifiée et $P(n)$ est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De cette manière, nous pouvons en déduire que $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ puisque $u_n > 0$ pour tout n. Donc $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante. CQFD

Conjecture Nous avons constaté que le rapport entre deux termes consécutifs semble se stabiliser vers 1.6 .
Tout d'abord, supposons que la suite $(\frac{u_{n+1}}{u_n})_n$ converge, alors :
Calculons $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$:
Nous avons d'après (1) que $\frac{u_{n+2}}{u_{n+1}} = 1 + \frac{u_n}{u_{n+1}}$ donc soit $\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \alpha$ alors :

$$\alpha = 1 + \frac{1}{\alpha} \tag{2}$$

Supposons $\alpha \neq 0$ donc $\alpha^2 = \alpha + 1$, c'est une équation de second degré où $\Delta = 1 - 4(1)(-1) = 5$ donc :

$$\alpha_\pm = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \tag{3}$$

Il n'y a qu'une seule solution possible $\alpha = \frac{1+\sqrt{5}}{2} = \phi > 0$ car $(u_n)_{n\geq 0}$ est définie positive.
Donc, nous trouvons :

$$\alpha = \phi = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} \tag{4}$$

Et il se trouve qu'en effet $\phi = 1.618033989...$

3.1.4 Estimation directe

Nous voulons essayer maintenant de trouver une formule explicite de la suite $(u_n)_{n\geq 0}$.

Considérations Nous savons que $\phi = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, alors nous pouvons conjecturer que la suite soit de la forme $u_n = \gamma\phi^n + v_n$ où $\gamma \in \mathbb{R}$ avec $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une certaine suite, vérifions cela :

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{\gamma\phi^{n+1} + v_{n+1}}{\gamma\phi^n + v_n} = \frac{\gamma\phi^{n+1}(1 + \frac{v_{n+1}}{\gamma\phi^{n+1}})}{\gamma\phi^n(1 + \frac{v_n}{\gamma\phi^n})} \tag{5}$$

En simplifiant, on retrouve $\frac{u_{n+1}}{u_n} = \phi \frac{1 + \frac{v_{n+1}}{\gamma\phi^{n+1}}}{1 + \frac{v_n}{\gamma\phi^n}}$ donc $\frac{u_{n+1}}{u_n} \to \phi$ si $\frac{v_n}{\gamma\phi^n} \to 0 \iff \frac{v_n}{\phi^n} \to 0$ ce qui implique que pour $n \to \infty$ la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est négligeable devant la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $w_n = \phi^n$.
Cela veut dire que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ peut s'exprimer comme $v_n = \phi^n\epsilon_n$ où $\epsilon_n \to 0$ lorsque $n \to \infty$ parce que :

$$\frac{v_n}{\phi^n} = \frac{\phi^n\epsilon_n}{\phi^n} = \epsilon_n \tag{6}$$

donc $\epsilon_n \to 0$.

Conséquences D'après nos considérations $u_n = \gamma\phi^n + \phi^n\epsilon_n$. En utilisant la relation de récurrence, nous avons :
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n \iff \gamma\phi^{n+2} + \phi^{n+2}\epsilon_{n+2} = \gamma(\phi^{n+1} + \phi^n) + \phi^{n+1}\epsilon_{n+1} + \phi^n\epsilon_n$.
Mais $\phi^{n+2} = \phi^{n+1} + \phi^n$ car ϕ satisfait l'équation suivante :

$$\phi^2 = \phi + 1 \tag{7}$$

Donc on a une nouvelle relation de récurrence :

$$\phi^{n+2}\epsilon_{n+2} = \phi^{n+1}\epsilon_{n+1} + \phi^n\epsilon_n \tag{8}$$

De la même manière, nous allons chercher la formule explicite de la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

$$\phi\frac{\epsilon_{n+2}}{\epsilon_{n+1}} = 1 + \frac{\epsilon_n}{\phi\epsilon_{n+1}} \tag{9}$$

Donc posons $lim_{n\to\infty}\frac{\epsilon_{n+2}}{\epsilon_{n+1}} = \alpha$ et le problème se résume à résoudre :

$$\phi\alpha = 1 + \frac{1}{\phi\alpha} \iff \phi^2\alpha^2 = \phi\alpha + 1 \tag{10}$$

Nous trouvons une solution unique $\alpha = \frac{1-\sqrt{5}}{2\phi}$.

Donc, nous pouvons conjecturer que la suite $(\epsilon_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit de la forme $\epsilon_n = \delta(\frac{1-\sqrt{5}}{2\phi})^n$ avec $\delta \in \mathbb{R}$. Alors $\phi^n\epsilon_n = \delta(1-\phi)^n$ donc $\boxed{u_n = \gamma\phi^n + \delta(1-\phi)^n}$ où $(\gamma, \delta) \in \mathbb{R}^2$

Démonstration Nous avons conjecturé que $u_n = \gamma\phi^n + \delta(1-\phi)^n$ donc essayons de montrer cela par récurrence :
Soit la propriété $P(n) =$ "$u_n = \gamma\phi^n + \delta(1-\phi)^n$", alors :

Initialisation :
Vérifions que la propriété $P(n)$ est vraie aux rangs 0 et 1 :
$u_0 = \delta + \gamma = 1$.
$u_1 = \gamma\phi + \delta(1-\phi) = 1$.
Nous avons donc un système linéaire qui admet une solution unique donc l'initialisation est vérifiée.

Hérédité :
Soit la propriété $P(n)$ vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'elle est vraie aussi au rang $n+2$:
$u_{n+2} = u_{n+1} + u_n = \gamma(\phi^{n+1} + \phi^n) + \delta((1-\phi)^{n+1} + (1-\phi)^n) = \gamma\phi^n(1+\phi) + \delta(1-\phi)^n(2-\phi)$ mais $1+\phi = \phi^2$ d'après (2) et $1-\phi = -\frac{1}{\phi}$ donc on a bien $u_{n+2} = \gamma\phi^{n+2} - \delta(1-\phi)^{n+2}$.
Ainsi $P(n+2)$ est vraie.

Conclusion L'initialisation est vérifiée et $P(n)$ est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous pouvons en déduire que le nombre d'animaux va toujours augmenter sans s'arrêter et donc la suite diverge.

3.2 Modèle avec mortalité

3.2.1 Mortalité à 50%

Dans ce modèle, l'évolution de la population a lieu de la manière suivante :

— Un couple d'enfants à l'instant n devient un couple d'adultes à l'instant $n+1$
— Un couple d'adultes à l'instant n devient un couple de parents à l'instant $n+1$
— La moitié des couples à l'instant n meurent à l'instant $n+1$

3.2.2 Analyse du problème

Enfants	***Parents***	***Adultes***	***Total***	***n***
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	2	2
1	1	0.5	2.5	3
1.5	1	1.25	3.75	4
2.25	1.5	1.625	5.375	5
3.125	2.25	2.3125	7.6875	6
4.5625	3.125	3.40625	11.09375	7
6.53125	4.5625	4.828125	15.921875	8
9.390625	6.53125	6.9765625	22.8984375	9
13.5078125	9.390625	10.01953125	32.91796875	10
19.41015625	13.5078125	14.40039063	47.31835938	11
27.90820313	19.41015625	20.70800781	68.02636719	12
40.11816406	27.90820313	29.76416016	97.79052734	13
57.67236328	40.11816406	42.7902832	140.5808105	14
82.90844727	57.67236328	61.51330566	202.0941162	15
119.1856689	82.90844727	88.42901611	290.5231323	16
171.3374634	119.1856689	127.1229553	417.6460876	17

Nous pouvons remarquer que, de même, le nombre d'individus semble croitre sans limite, mais moins vite que précédemment.

3.2.3 Formule de récurrence

Maintenant, nous allons calculer les termes u_n, u_{n+1}, u_{n+2} et u_{n+3} en essayant d'écrire ce dernier terme comme une combinaison linéaire des trois termes précédents, car, dans ce cas, nous avons 3 variables à considérer : *les enfants, les adultes et les parents,* donc il semblerait logique d'avoir une suite récurrente d'ordre 3.
Supposons d'avoir a enfants, b adultes et c parents à l'instant n alors :

	Enfants	Adultes	Parents	Total
u_n	a	b	c	$a+b+c$
u_{n+1}	$b+c$	a	$b+\frac{c}{2}$	$a+2b+\frac{3c}{2}$
u_{n+2}	$b+\frac{c}{2}+a$	$b+c$	$a+\frac{b}{2}+\frac{c}{4}$	$2a+\frac{5b}{2}+\frac{7c}{4}$
u_{n+3}	$a+\frac{3b}{2}+\frac{5c}{4}$	$b+\frac{c}{2}+a$	$\frac{a}{2}+\frac{5b}{4}+\frac{9c}{8}$	$\frac{5a}{2}+\frac{15b}{4}+\frac{23c}{8}$

Or, nous voulons déterminer $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u_{n+3} = \xi_1 u_{n+2} + \xi_2 u_{n+1} + \xi_3 u_n \tag{11}$$

Par identification, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \dfrac{5}{2} \\ \\ \dfrac{5}{2}\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = \dfrac{15}{4} \\ \\ \dfrac{7}{4}\xi_1 + \dfrac{3}{2}\xi_2 + \xi_3 = \dfrac{23}{8} \end{cases} \tag{12}$$

nous trouvons comme seule solution

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\frac{1}{2}, 1, \frac{1}{2}) \tag{13}$$

Donc la formule de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est :

$$\boxed{u_{n+3} = \frac{1}{2}u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n} \tag{14}$$

De la même façon que dans la section précédente, on peut déterminer une formule explicite de la suite en résolvant l'équation :

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2} \tag{15}$$

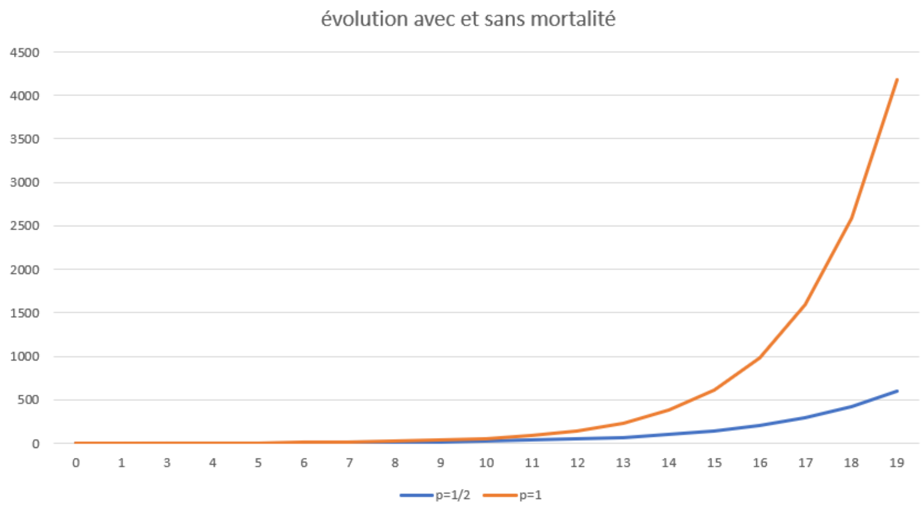
Il s'avère qu'il n'y a qu'une seule solution réelle et deux racines complexes conjuguées. En particulier, nous trouvons : $\alpha_1 \approx 1,4376$, $\alpha_2 \approx -0,46878 - 0,35785i = 0,58975e^{-2,4896i}$, $\alpha_3 \approx -0,46878 + 0,35785i = 0,58975e^{2,4896i}$.

Notons $r = 0,58975$ et $\theta = 2,4896$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{R}}$ est de la forme :

$$u_n = \beta_1\alpha_1^n + \beta_2 r^n cos(n\theta) + \beta_3 r^n sin(n\theta) \tag{16}$$

avec $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$.

Nous pouvons encore remarquer que la suite diverge lorsque $n \to \infty$ car $r^n \to 0$ puisque $-1 < r < 1$, mais $\alpha_1^n \to \infty$ parce que $\alpha_1 > 1$. En effet, nous pouvons nous apercevoir que la vitesse de croissance est nettement différente.



3.3 Généralisation (cas des parents)

3.3.1 Généralisation

A présent, nous allons essayer de généraliser cela, c'est-à-dire que nous allons nous intéresser à un coefficient χ que nous appellerons **coefficient de mortalité**.
Supposons qu'à chaque instant n, t% des parents meurent, alors nous avons l'égalité $\chi = 1 - t$.
De la même manière qu'avec le cas $\chi = 0,5$, nous allons calculer les premiers 4 termes et écrire u_{n+3} comme une combinaison linéaire des trois termes précédents.

	Enfants	***Adultes***	***Parents***	***Total***
u_n	a	b	c	$a+b+c$
u_{n+1}	$c+b$	a	$b+c\chi$	$a+2b+c(1+\chi)$
u_{n+2}	$a+b+c\chi$	$c+b$	$a+b\chi+c\chi^2$	$2a+b(2+\chi)+c(1+\chi+\chi^2)$
u_{n+3}	$a+b\chi+c\chi^2+c+b$	$a+b+c\chi$	$c+b+a\chi+b\chi^2+c\chi^3$	$a(2+\chi)+b(3+\chi+\chi^2)+//+c(2+\chi+\chi^2+\chi^3)$

Posons à nouveau $u_{n+3} = \xi_1 u_{n+2} + \xi_2 u_{n+1} + \xi_3 u_n$ avec $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. Cette fois nous trouvons :

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\chi, 1, 1-\chi) \tag{17}$$

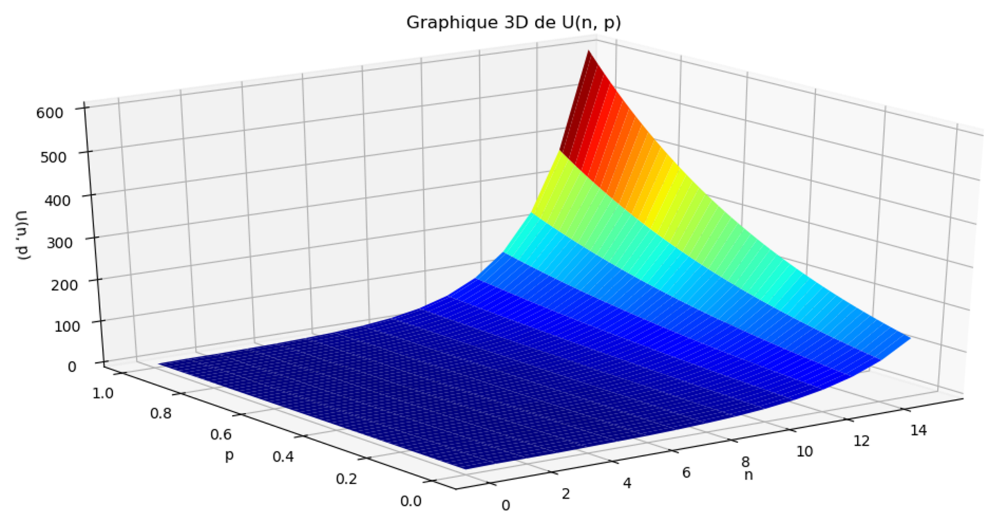
ce qui donne

$$\boxed{u_{n+3} = \chi u_{n+2} + u_{n+1} + (1-\chi) u_n} \tag{18}$$

Nous remarquons d'abord que cela est cohérent avec l'exemple précédent car avec $\chi = 0,5$ nous retrouvons l'équation (14).
En outre, nous nous apercevons que même avec $\chi = 0$, c'est-à-dire 100% de mortalité la suite diverge. En effet, nous obtenons $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ et les solutions de l'équation associée $\alpha^3 = \alpha + 1$ sont $\alpha_1 = 1,3427$, $\alpha_2 = 0.86884e^{2.4377i}$ et $\alpha_3 = 0.86884e^{-2.4377i}$, donc il existe $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que :

$$u_n = \beta_1 (1,3247)^n + \beta_2 (0.86884)^n cos(2.4377n) + \beta_3 (0.86884)^n sin(2.4377n) \tag{19}$$

et nous voyons clairement que $u_n \to \infty$ lorsque $n \to \infty$ à cause du premier terme qui est le seul qui ne tend pas vers 0 et qui est donc le responsable de la nature non convergente de la suite.
Nous proposons un graphique de la suite en fonction du taux de mortalité (noté p) et n :



En conclusion, nous pouvons en déduire que la suite (u_n) ne converge jamais et l'effectif total d'individus croît de manière exponentielle avec une vitesse de croissance différente, qui change selon le taux de mortalité χ.

3.4 Généralisation

Jusqu'ici, nous nous sommes restreints au cas des parents, alors cherchons maintenant d'aller plus loin et de décrire l'évolution de la population animale avec un nombre arbitraire de générations.

3.4.1 Analyse du problème

Par définition, nous avons :

$$u_n^{(\kappa)} = \sum_{k=0}^{\kappa} \eta_n^k \tag{20}$$

Donc si nous voulons trouver la suite $(u_n^{(\kappa)})_n$ le problème se réduit à trouver les suites $(\eta_n^k)_n$ pour tout $k \in I$.

Essayons de trouver une formule de récurrence pour les suites $(\eta_n^k)_n$. Dans ce modèle-ci, nous allons supposer que seulement la dernière génération meurt avec un taux de mortalité χ et que chaque couple d'individu fait un couple d'enfants à chaque instant n pour toute génération sauf pour les enfants.

Cela donne :

n	η_n^0	$\dots$	η_n^k	$\dots$	η_n^κ
$n+1$	$\sum_{k\in I^*} \eta_n^k$	$\dots$	η_n^{k-1}	$\dots$	$\eta_n^{\kappa-1} + \chi\eta_n^\kappa$

Donc, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \eta_{n+1}^0 = \sum_{k\in I^*} \eta_n^k \\ \eta_{n+1}^k = \eta_n^{k-1} \qquad \forall k \in I^* - \{\kappa\} \\ \eta_{n+1}^\kappa = \eta_n^{\kappa-1} + \chi\eta_n^\kappa \end{cases} \tag{21}$$

Nous pouvons réécrire cela sous forme vectorielle puis matricielle :

$$\begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_n^0 + \dots + \eta_n^\kappa \\ \eta_n^0 \\ \vdots \\ \eta_n^{k-1} \\ \vdots \\ \eta_n^{\kappa-1} + \chi\eta_n^\kappa \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_n^0 \\ \eta_n^1 \\ \vdots \\ \eta_n^k \\ \vdots \\ \eta_n^\kappa \end{pmatrix}$$

Alors notons :

$$\Lambda_{n+1}^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} \qquad \Lambda_n^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \eta_n^0 \\ \eta_n^1 \\ \vdots \\ \eta_n^k \\ \vdots \\ \eta_n^\kappa \end{pmatrix} \qquad \Gamma(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \chi \end{pmatrix}$$

Nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\Lambda_{n+1}^{(\kappa)} = \Gamma(\chi)\Lambda_n^{(\kappa)} \tag{22}$$

Comme pour les suites géométriques du type $u_{n+1} = qu_n$ où il se trouve que $u_n = u_0 q^n$, ici nous avons le théorème suivant.

Théorème Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie, pour tout $\mathbb{N}$, par U_0 et $U_{n+1} = AU_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Ainsi :

$$\Lambda_n^{(\kappa)} = \Gamma(\chi)^n \Lambda_0^{(\kappa)} \tag{23}$$

où $\Lambda_0^{(\kappa)}$ est le vecteur qui contient les conditions initiales du problème.
Il s'avère que les coordonnées du vecteur $\Lambda_n^{(\kappa)}$ sont exactement les η_n^k que nous cherchons.
Comme $\Lambda_n^{(\kappa)} \in \mathbb{R}^{\kappa+1}$, prenons une application π_k qu'à chaque vecteur associe sa k-ème coordonnée :

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathbb{R}^{\kappa+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Lambda_n^{(\kappa)} &\longmapsto \eta_n^k \end{aligned}$$

Alors nous avons :

$$\boxed{u_n^{(\kappa)} = \sum_{k \in I} \pi_k(\Gamma(\chi)^n \Lambda_0^{(\kappa)})} \tag{24}$$

Nous avons donc trouvé une expression de la suite $(u_n^{(\kappa)})_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où interviennent le vecteur qui a comme coordonnées les conditions initiales et une certaine matrice $\Gamma(\chi)$ connue qui dépend du coefficient de mortalité.

3.4.2 Inconvénients

Il se trouve que calculer la puissance d'une matrice n'est pas difficile, mais si nous prenons un κ très grand, les calculs deviennent trop longs.
Néanmoins, si Γ était une matrice diagonale, alors il serait beaucoup plus simple de calculer une telle puissance car il s'avère que si A est une matrice diagonale alors :

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2 & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & a_n \end{pmatrix} \qquad A^n = \begin{pmatrix} a_1^n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & a_2^n & \dots & 0 \\ \vdots & 0 & \dots & a_n^n \end{pmatrix}$$

On appelle vecteur propre d'une matrice A, tout vecteur v non nul tel qu'il existe un λ, dans notre cas réel, tel que $Av = \lambda v$. On dit que λ est la valeur propre associée au vecteur propre v.

Il se trouve que s'il existe une base[1] de vecteurs propres de l'espace $\mathbb{R}^{\kappa+1}$ alors A est diagonalisable. Cela veut dire que si nous écrivons la matrice à partir de la base des vecteurs propres, alors la matrice A est diagonale.
Supposons alors que la matrice Γ soit diagonalisable, notons $\gamma_0, \ldots, \gamma_\kappa$ les valeurs propres de Γ et $v_0, \ldots, v_\kappa$ les vecteurs propres respectifs.
Alors Γ s'écrit comme :

$$\Gamma = \begin{pmatrix} \gamma_0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_1 & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \gamma_\kappa \end{pmatrix}$$

donc

$$\Gamma^n = \begin{pmatrix} \gamma_0^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_1^n & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \gamma_\kappa^n \end{pmatrix}$$

Supposons de plus que $\Lambda_0^{(\kappa)}$ s'écrive comme :

$$\Lambda_0^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_\kappa \end{pmatrix}$$

dans la base des vecteurs propres. Ainsi, nous obtenons :

$$\Gamma\Lambda_0^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \gamma_0^n & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \gamma_1^n & \ldots & 0 \\ \vdots & 0 & \ldots & \gamma_\kappa^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_0 \\ \vdots \\ C_\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C_0\gamma_0^n \\ \vdots \\ C_\kappa\gamma_\kappa^n \end{pmatrix} = \sum_{k\in I} C_k \gamma_k^n v_k$$

donc :$u_n^{(\kappa)} = \sum_{k\in I} \pi_k(\sum_{l\in I} C_l \gamma_l^n v_l)$ et comme π_k est une forme linéaire[2] :

$$\boxed{u_n^{(\kappa)} = \sum_{k\in I}\sum_{l\in I} C_l \gamma_l^n \pi_k(v_l) = \sum_{(k,l)\in I^2} C_l \gamma_l^n \pi_k(v_l)} \tag{25}$$

4 Conclusion

En somme, nous pouvons constater que ces différents modèles sont de plus en plus réalistes. En effet, le premier modèle néglige la mortalité et cela ne peut pas être le cas d'un modèle bien construit. Néanmoins, même en ayant introduit la mortalité dans les modèles suivants, nous n'avons considéré cela que pour la dernière génération et dans la réalité cela n'est pas forcément le cas. Nous aurions pu donner un coefficient de mortalité à chaque génération et cela aurait pu améliorer ce modèle.

1. Une base est une famille de vecteurs telle que tout élément de l'espace peut s'exprimer comme une combinaison linéaire de ces vecteurs, et toute combinaison linéaire de ces vecteurs égale au vecteur nul est telle que tous ses coefficients sont nuls.

2. Une forme f est dite linéaire si : f est une application à valeur dans $\mathbb{R}$ (dans ce cas) et si pour tout vecteur u, v dans l'espace de départ et λ réel, on a $f(u+v) = f(u) + f(v)$ et $f(\lambda u) = \lambda f(u)$

Références

[1] "Wolfram|Alpha : Computational Intelligence." Wolfram|Alpha : Computational Intelligence, http ://wolframalpha.com. Dernier

[2] Abdelkhalak, El Hami, and Radi Bouchaïb. Maths - MPSI-MP2I : Cours, Exercices et Problèmes Corrigés. ELLIPSES, p. 274.

[3] Troesch, Alain. "Site d'Alain Troesch, Professeur de Mathématiques En CPGE." Site d'Alain Troesch, Professeur de Mathématiques En CPGE, http ://alain.troesch.free.fr/.

[4] "EduPython." EduPython, https ://edupython.tuxfamily.org/.

[5] Bayart, Fred. "Formulaire - Suites Récurrentes Linéaires." Bibm@th, La Bibliothèque Des Mathématiques, https ://www.bibmath.net/formulaire/index.php ?action=affichequoi=suitereclin.

[6] Site de l'Université de Rennes, https ://perso.univ-rennes1.fr/goulwen.fichou/cours5-DF.pdf.