

Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis ou des imperfections, autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Évolution d'une population animale

Année 2022-2023

Yassin Boulkhir, Ethan Martin, Kenan Martin, Lauryne Colome et Zakari Boudache
(classes de Première et Terminale)

Établissement : Lycée Jean-Baptiste Dumas (Alès)

Enseignants : Loïc Laferte et Laurent Maurin

Chercheur : Serge Dumont, Université de Nîmes

Table des matières

1	Présentation du sujet	2
2	Résultats et notations	2
2.1	Résultats	2
2.2	Notations	2
3	Evolution d'une population animale	2
3.1	Modélisation de l'évolution de la population	2
3.1.1	Première approche	2
3.1.2	Modélisation sous forme d'une suite	3
3.1.3	Analyse de la suite	4
3.1.4	Estimation directe	6
3.2	Modèle avec mortalité	7
3.2.1	Mortalité à 50%	7
3.2.2	Analyse du problème	8
3.2.3	Formule de récurrence	8
3.3	Généralisation (cas des parents)	11
3.3.1	Généralisation	11
3.4	Généralisation	12
3.4.1	Analyse du problème	12
4	Conclusion	14
	Notes d'édition	15

1. Présentation du sujet

Nous nous proposons d'étudier l'évolution de couples d'animaux. Les hypothèses sont les suivantes. À chaque pas de temps n , nous supposons que :

- Chaque couple d'enfants du pas précédent devient un couple d'adultes ;
- Chaque couple d'adultes du pas précédent a un couple d'enfants.

Le cas le plus standard consiste à démarrer avec un seul couple d'enfants.

2. Résultats et notations

2.1. Résultats

Nous allons étudier ce problème en trois étapes. Dans un premier temps, nous allons nous intéresser au cas plus simple avec deux classes d'âges et un taux de mortalité nul. Ensuite, nous allons voir un cas spécifique avec trois classes d'âges et un taux de mortalité de 50%. Enfin, nous allons généraliser cela avec un nombre arbitraire κ de classes d'âges et un coefficient de mortalité χ .

2.2. Notations

Pour la suite du problème, nous allons définir les notations suivantes :

- $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est l'ensemble des suites à valeurs dans \mathbb{R} ;
- $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite caractérisant l'effectif total d'individus à chaque instant n ;
- $(\eta_n^k)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la suite caractérisant l'effectif total d'individus faisant partie de la k -ème classe d'âge avec $k \in I = \{0, \dots, \kappa\}$ où $\kappa = \max_{k \in I} k$;
- χ est le coefficient de mortalité ;
- $\Gamma(\chi)$ est la matrice introduite à la page 11 qui dépend de χ ;
- $\Lambda_n^{(\kappa)}$ est le vecteur ayant comme coordonnées les $\eta_n^0, \dots, \eta_n^\kappa$;

3. Evolution d'une population animale

3.1. Modélisation de l'évolution de la population

3.1.1 Première approche

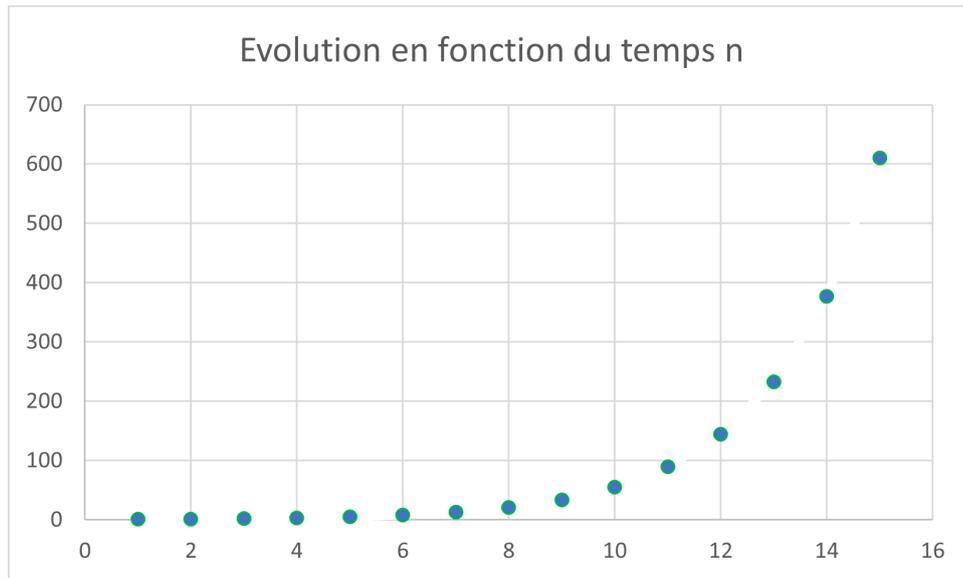
Commençons par un exemple. À $n = 0$, nous avons donc un couple d'enfants. Au pas de temps suivant, à $n = 1$, le couple d'enfants devient un couple d'adultes. Ensuite, au pas de temps suivant, à $n = 2$, le couple d'adultes fait un couple d'enfants et demeure en vie. À $n = 3$, le couple d'enfants devient un couple d'adultes, le couple d'adultes fait un couple d'enfants et demeure en vie, puis on continue ainsi.

Voici un exemple pour $n = 15$.

n	<i>Enfants</i>	<i>Adultes</i>	<i>Total</i>
0	1	0	1
1	0	1	1
2	1	1	2
3	1	2	3
4	2	3	5
5	3	5	8
6	5	8	13
7	8	13	21
8	13	21	34
9	21	34	55
10	34	55	89
11	55	89	144
12	89	144	233
13	144	233	377
14	233	377	610
15	377	610	987

Nous constatons qu'à chaque pas de temps $n \geq 2$, l'effectif total d'individus est égal à la somme des effectifs totaux d'individus des deux pas de temps précédents.

Ci-dessous, nous proposons un graphique décrivant l'évolution de la population en fonction de n .



Nous remarquons aussi que la population croît de manière exponentielle.

3.1.2 Modélisation sous forme d'une suite

Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la suite caractérisant l'effectif total d'individus à chaque pas de temps n . Alors de la même manière :

	<i>Enfants</i>	<i>Adultes</i>	<i>Total</i>
u_n	a	b	$a + b$
u_{n+1}	b	$a + b$	$a + 2b$
u_{n+2}	$a + b$	$a + 2b$	$2a + 3b$

Nous pouvons en déduire cette relation de récurrence :

$$\boxed{u_{n+2} = u_{n+1} + u_n} \quad (1)$$

car $u_{n+2} = 2a + 3b$ et $u_n + u_{n+1} = (a + b) + (a + 2b) = 2a + 3b$ donc nous avons bien l'égalité.

3.1.3 Analyse de la suite

n	u_n	$\frac{u_{n+1}}{u_n}$
0	1	
1	1	1
2	2	2
3	3	1.5
4	5	1.666666667
5	8	1.6
6	13	1.625
7	21	1.615384615
8	34	1.619047619
9	55	1.617647059
10	89	1.618181818
11	144	1.617977528
12	233	1.618055556
13	377	1.618025751
14	610	1.618037135

En analysant la suite avec un logiciel, nous pouvons faire deux conjectures :

- La suite (u_n) semble être croissante.
- Le rapport entre deux termes consécutifs semble se stabiliser vers 1.6.

Démonstration. Montrons que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

D'après la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Ainsi $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$. La différence entre deux termes successifs est donc égale au terme qui les précède. Montrons alors que $u_n > 0$ pour tout n . De plus, dans ce modèle, nous allons toujours considérer que les premiers deux termes de la suite sont strictement positifs (1).

Soit pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : " $u_n > 0$ ".

Initialisation : Vérifions que la propriété est vraie aux rangs 0 et 1.

En effet, $u_0 > 0$ et $u_1 > 0$ par hypothèse.

Hérédité : Soit la propriété P_n vraie aux rangs $n \geq 0$ et $n + 1 \geq 0$, montrons qu'elle est vraie au rang $n + 2$.

La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est définie par $u_{n+2} - u_{n+1} = u_n$. Or $u_{n+1} > 0$ et $u_n > 0$ d'après l'hypothèse de récurrence, donc $u_{n+2} > 0$. Ainsi P_{n+2} est vraie.

Conclusion : L'initialisation est vérifiée et P_n est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De cette manière, nous pouvons en déduire que $u_{n+2} - u_{n+1} > 0$ puisque $u_n > 0$ pour tout n . Donc $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante. CQFD

Nous avons constaté que le rapport entre deux termes consécutifs semble se stabiliser vers 1.6.

Démonstration. Tout d'abord, montrons que la suite $(u_{n+1}/u_n)_n$ converge. Pour cela nous allons utiliser le théorème suivant :

Proposition. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite réelle ou complexe. Alors $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge dans $\overline{\mathbb{R}}$ ou \mathbb{C} si et seulement si $(u_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(u_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ convergent vers une même limite l , et dans ce cas, $\lim u_n = l$.

On définit la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ par $v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}$. Ainsi, elle vérifie la relation de récurrence :

$$v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} \quad (2)$$

Or, on a montré que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante, d'où $u_{n+1} > u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Alors $\frac{u_{n+1}}{u_n} > 1$, car $u_n > 0$. Donc $v_n > 1$. De plus, $v_{n+1} = 1 + \frac{1}{v_n} < 2$, car $\frac{1}{v_n} < 1$. Par conséquent, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est bornée et on a $1 < v_n < 2$.

D'autre part, montrons que $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ est décroissante par récurrence. Dans ce modèle, on prendra $u_0 = 1$ et $u_1 = 1$ (2).

Premièrement, soit pour tout entier naturel n , P_n : " $v_{2n+2} > v_{2n}$ ".

Initialisation : Vérifions que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Ainsi $v_0 = \frac{u_1}{u_0} = 1$ et $v_2 = \frac{u_3}{u_2} = \frac{3}{2}$. Or $\frac{3}{2} > 1$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} l'est aussi. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . Ainsi f est décroissante. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence $v_{2n+2} > v_{2n}$, on a $v_{2n+3} = f(v_{2n+2}) < f(v_{2n}) = v_{2n+1}$, d'où aussi $v_{2n+4} = f(v_{2n+3}) > f(v_{2n+1}) = v_{2n+2}$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : L'initialisation est vérifiée et P_n est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

De même, soit pour tout entier naturel n , P_n : " $v_{2n+3} < v_{2n+1}$ " (3).

Initialisation : Vérifions que la propriété est vraie au rang $n = 0$.

Ainsi $v_1 = \frac{u_2}{u_1} = \frac{2}{1} = 2$ et $v_3 = \frac{u_4}{u_3} = \frac{5}{3}$. Or $\frac{5}{3} < 2$ donc P_0 est vraie.

Hérédité : On suppose qu'il existe un rang $n \geq 0$ tel que P_n est vraie. Montrons que P_{n+1} l'est aussi. Soit $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* . Ainsi f est décroissante. De plus, d'après l'hypothèse de récurrence $v_{2n+3} < v_{2n+1}$, on a $v_{2n+4} = f(v_{2n+3}) > f(v_{2n+1}) = v_{2n+2}$ et $v_{2n+5} = f(v_{2n+4}) < f(v_{2n+2}) = v_{2n+3}$. Donc P_{n+1} est vraie.

Conclusion : L'initialisation est vérifiée et P_n est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Donc, les suites $(v_{2n})_{n \in \mathbb{N}}$ et $(v_{2n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ sont respectivement croissante et décroissante, ainsi que bornées. Donc d'après le théorème de la convergence monotone, les deux suites convergent.

Théorème du point fixe. Soit $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite définie par la relation $u_{n+1} = f(u_n)$. Si $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge et si f est continue, alors la limite l vérifie la relation $l = f(l)$.

Or, (v_{2n}) et (v_{2n+1}) vérifient $v_{2n} = f(v_{2n-1})$ et $v_{2n+1} = f(v_{2n})$, où $f : x \mapsto 1 + \frac{1}{x}$ définie sur \mathbb{R}^* est continue sur son ensemble de définition. Donc les deux limites l et l' vérifient $l = f(l)$ et $l' = f(l')$ (4). D'autre part, l'équation $f(x) = x \iff 1 + \frac{1}{x} = x \iff x^2 = x + 1$ avec $x \neq 0$ est une équation de second

degré. Celle-ci admet deux solutions :

$$x_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Or, la seule solution acceptable est $\frac{1 + \sqrt{5}}{2}$ car comprise entre 1 et 2, puisque (v_n) est bornée entre ces deux derniers. D'où, nous avons forcément $l = l'$. Ainsi, d'après la proposition initiale, comme (v_{2n}) et (v_{2n+1}) convergent vers une même limite l alors, (v_n) converge vers cette même limite. De plus, cette limite est le nombre d'or φ .

3.1.4 Estimation directe

Nous voulons essayer maintenant de trouver une formule explicite de la suite $(u_n)_{n \geq 0}$.

Soit \mathcal{A} l'ensemble des suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ réelles, qui vérifient la relation de récurrence $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. On s'intéresse, d'abord, à chercher s'il existe des suites du type $(r^n)_n$ qui appartiennent à \mathcal{A} .

Soit $(r^n)_n \in \mathcal{A}$. Ainsi $(r^n)_n$ vérifie $r^{n+2} = r^{n+1} + r^n$. D'où $r^n(r^2 - r - 1) = 0$. Or si $r \neq 0$, nous avons cette condition sur r : $r^2 - r - 1 = 0$. On retrouve la même équation du paragraphe précédent admettant deux solutions :

$$r_{\pm} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Ainsi $r_+ = \varphi$ et $r_- = 1 - \varphi$. D'où il est possible de vérifier que $(\varphi^n)_n \in \mathcal{A}$ et $((1 - \varphi)^n)_n \in \mathcal{A}$.

De plus, montrons aussi que pour tout λ, μ réels, $(\lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n)_n \in \mathcal{A}$.

Démonstration

Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ et $(u_n)_n$ telle que $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n$.

Ainsi,

$$u_{n+2} = \lambda\varphi^{n+2} + \mu(1 - \varphi)^{n+2} = \lambda\varphi^n\varphi^2 + \mu(1 - \varphi)^n(1 - \varphi)^2.$$

Or $\varphi^2 = \varphi + 1$ et $(1 - \varphi)^2 = (1 - \varphi) + 1$ car φ et $1 - \varphi$ sont racines du polynôme $X^2 - X - 1$. D'où

$$u_{n+2} = \lambda\varphi^n(\varphi + 1) + \mu(1 - \varphi)^n((1 - \varphi) + 1) = \lambda\varphi^{n+1} + \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^{n+1} + \mu(1 - \varphi)^n.$$

Donc, $u_{n+2} = (\lambda\varphi^{n+1} + \mu(1 - \varphi)^{n+1}) + (\lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n) = u_{n+1} + u_n$.

Nous avons donc montré l'implication suivante, pour tous $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$:

$$\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n \implies (u_n)_n \in \mathcal{A}$$

Montrons aussi la réciproque (5).

Démonstration. Soit $(u_n)_n \in \mathcal{A}$. Ainsi $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$.

On pose pour tout $n \in \mathbb{N}$, P_n : " $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ". Montrons la propriété par une récurrence double.

Initialisation : Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$.

Pour $n = 0$, par hypothèse $u_2 = u_1 + u_0$. De plus

$$\lambda\varphi^2 + \mu(1 - \varphi)^2 = \lambda(\varphi + 1) + \mu((1 - \varphi) + 1) = (\lambda\varphi + \mu(1 - \varphi)) + (\lambda + \mu).$$

Pour $n = 1$, par hypothèse $u_3 = u_2 + u_1$, de même

$$\begin{aligned} \lambda\varphi^3 + \mu(1 - \varphi)^3 &= \lambda\varphi\varphi^2 + \mu(1 - \varphi)^2(1 - \varphi) = \lambda\varphi(1 + \varphi) + \mu(1 + (1 - \varphi))(1 - \varphi) \\ &= (\lambda\varphi^2 + \mu(1 - \varphi)^2) + (\lambda\varphi + \mu(1 - \varphi)). \end{aligned}$$

Ainsi, l'initialisation est vérifiée.

Hérédité : Soit n un entier fixé. On suppose la propriété P_n vraie aux rangs n et $n + 1$. Montrons donc P_{n+2} .

Par hypothèse $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. Or d'après l'hypothèse de récurrence, on a $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n$ et $u_{n+1} = \lambda\varphi^{n+1} + \mu(1 - \varphi)^{n+1}$. Donc

$$u_{n+2} = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n + \lambda\varphi^{n+1} + \mu(1 - \varphi)^{n+1}.$$

D'où

$$u_{n+2} = \lambda\varphi^n(1 + \varphi) + \mu(1 - \varphi)^n(1 + (1 - \varphi)) = \lambda\varphi^n\varphi^2 + \mu(1 - \varphi)^n(1 - \varphi)^2.$$

Finalement, $u_{n+2} = \lambda\varphi^{n+2} + \mu(1 - \varphi)^{n+2}$. Donc P_{n+2} est vraie.

Conclusion : L'initialisation est vérifiée et P_n est héréditaire donc elle est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Nous avons finalement montré cela :

$$\exists(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, (\forall n \in \mathbb{N}, u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n) \iff (u_n)_n \in \mathcal{A}$$

Ainsi l'ensemble \mathcal{A} est caractérisé entièrement par les combinaisons linéaires des suites $(\varphi^n)_n$ et $((1 - \varphi)^n)_n$.

De plus, montrons que la suite $(u_n)_n$ diverge.

On a : $\mu(1 - \varphi)^n \rightarrow 0$ car $-1 < 1 - \varphi < 1$. Par ailleurs, $\varphi > 1$, donc $\lambda\varphi^n \rightarrow \infty$ si $\lambda \neq 0$. Vérifions cela grâce aux conditions initiales. Ainsi

$$\begin{cases} u_0 = \lambda + \mu \\ u_1 = \lambda\varphi + \mu(1 - \varphi) \end{cases}$$

Résolution. En multipliant la première équation par φ et puis en faisant la soustraction des deux, on obtient $\varphi u_0 - u_1 = \mu\varphi - \mu(1 - \varphi)$. D'où $\mu = \frac{\varphi u_0 - u_1}{2\varphi - 1}$.

D'autre part, $\lambda = u_0 - \mu = u_0 - \mu = \frac{\varphi u_0 - u_1}{2\varphi - 1} = \frac{u_0(\varphi - 1) - u_1}{2\varphi - 1}$. Donc

$$\boxed{\lambda = \frac{u_0(\varphi - 1) - u_1}{2\varphi - 1}, \quad \mu = \frac{\varphi u_0 - u_1}{2\varphi - 1}.} \quad (3)$$

Par conséquent $\lambda = 0 \iff u_0(\varphi - 1) = u_1$. Ainsi, la suite $(u_n)_n$ diverge si $u_0(\varphi - 1) \neq u_1$.

3.2. Modèle avec mortalité

3.2.1 Mortalité à 50%

Dans ce modèle, l'évolution de la population a lieu de la manière suivante :

- Un couple d'enfants à l'instant n devient un couple d'adultes à l'instant $n + 1$
- Un couple d'adultes à l'instant n devient un couple de parents à l'instant $n + 1$ en faisant un couple d'enfants
- La moitié des couples de parents à l'instant n meurent à l'instant $n + 1$ en faisant un couple d'enfants

3.2.2 Analyse du problème

<i>Enfants</i>	<i>Adultes</i>	<i>Parents</i>	<i>Total</i>	<i>n</i>
1	0	0	1	0
0	1	0	1	1
1	0	1	2	2
1	1	0.5	2.5	3
1.5	1	1.25	3.75	4
2.25	1.5	1.625	5.375	5
3.125	2.25	2.3125	7.6875	6
4.5625	3.125	3.40625	11.09375	7
6.53125	4.5625	4.828125	15.921875	8
9.390625	6.53125	6.9765625	22.8984375	9
13.5078125	9.390625	10.01953125	32.91796875	10
19.41015625	13.5078125	14.40039063	47.31835938	11
27.90820313	19.41015625	20.70800781	68.02636719	12
40.11816406	27.90820313	29.76416016	97.79052734	13
57.67236328	40.11816406	42.7902832	140.5808105	14
82.90844727	57.67236328	61.51330566	202.0941162	15
119.1856689	82.90844727	88.42901611	290.5231323	16
171.3374634	119.1856689	127.1229553	417.6460876	17

On construit le tableau ci-dessus à l'aide du modèle introduit. Nous pouvons remarquer que, de même, le nombre d'individus semble croître sans limite, mais moins vite que précédemment.

3.2.3 Formule de récurrence

Maintenant, nous allons calculer les termes u_n , u_{n+1} , u_{n+2} et u_{n+3} en essayant d'écrire ce dernier terme comme une combinaison linéaire des trois termes précédents car, dans ce cas, nous avons 3 variables à considérer : *les enfants, les adultes et les parents*, donc il semblerait logique d'avoir une suite récurrente d'ordre 3.

Supposons d'avoir a enfants, b adultes et c parents à l'instant n , alors

	Enfants	Adultes	Parents	Total
u_n	a	b	c	$a + b + c$
u_{n+1}	$b + c$	a	$b + \frac{c}{2}$	$a + 2b + \frac{3c}{2}$
u_{n+2}	$b + \frac{c}{2} + a$	$b + c$	$a + \frac{b}{2} + \frac{c}{4}$	$2a + \frac{5b}{2} + \frac{7c}{4}$
u_{n+3}	$a + \frac{3b}{2} + \frac{5c}{4}$	$b + \frac{c}{2} + a$	$\frac{a}{2} + \frac{5b}{4} + \frac{9c}{8}$	$\frac{5a}{2} + \frac{15b}{4} + \frac{23c}{8}$

Or, nous voulons déterminer $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u_{n+3} = \xi_1 u_{n+2} + \xi_2 u_{n+1} + \xi_3 u_n$$

Par identification, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} 2\xi_1 + \xi_2 + \xi_3 = \frac{5}{2} \\ \frac{5}{2}\xi_1 + 2\xi_2 + \xi_3 = \frac{15}{4} \\ \frac{7}{4}\xi_1 + \frac{3}{2}\xi_2 + \xi_3 = \frac{23}{8} \end{cases}$$

Résolution du système

On peut procéder par combinaisons linéaires.

Ainsi, en soustrayant la première équation de la deuxième, nous obtenons

$$\frac{1}{2}\xi_1 + \xi_2 = \frac{15}{4} - \frac{5}{2} = \frac{5}{4}.$$

D'où, $\xi_1 = \frac{5}{2} - 2\xi_2$. De plus, soit (1) la première équation et (3) la troisième, en effectuant l'opération $8 \times (3) - 7 \times (1)$, on a

$$5\xi_2 + \xi_3 = \frac{11}{2}.$$

D'où $\xi_3 = \frac{11}{2} - 5\xi_2$. Ainsi, par substitution, dans la troisième équation,

$$\frac{7}{4}\left(\frac{5}{2} - 2\xi_2\right) + \frac{3}{2}\xi_2 + \left(\frac{11}{2} - 5\xi_2\right) = \frac{23}{8} \iff -7\xi_2 = -7 \iff \xi_2 = -1.$$

Donc

$$\xi_1 = \frac{5}{2} - 2 = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad \xi_3 = \frac{11}{2} - 5 = \frac{1}{2}$$

En conclusion, la solution du système est :

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = \left(\frac{1}{2}, -1, \frac{1}{2}\right)$$

Donc la formule de récurrence de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est

$$\boxed{u_{n+3} = \frac{1}{2}u_{n+2} + u_{n+1} + \frac{1}{2}u_n} \quad (4)$$

De la même façon que dans la section précédente, on peut déterminer une formule explicite de la suite en résolvant l'équation :

$$\alpha^3 = \frac{1}{2}\alpha^2 + \alpha + \frac{1}{2}$$

Résolution de l'équation

Nous allons résoudre cette équation à l'aide de la méthode de Cardan. Ainsi grâce à un premier changement de variable astucieux, $\alpha = x + \frac{1}{6}$, on a

$$\left(x + \frac{1}{6}\right)^3 - \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{6}\right)^2 - \left(x + \frac{1}{6}\right) - \frac{1}{2} = 0.$$

En développant, on a

$$x^3 - \frac{13}{12}x - \frac{73}{108} = 0.$$

D'où, un nouveau changement de variable $x = u + v$, ce qui nous permet de rajouter une condition sur u et v car nous avons introduit deux nouvelles variables.

$$(u + v)^3 - \frac{13}{12}(u + v) - \frac{73}{108} = 0 \iff u^3 + v^3 + (3uv - \frac{13}{12}) - \frac{73}{108}.$$

Ainsi, on impose $3uv - \frac{13}{12} = 0$, soit $u^3 v^3 = \frac{2197}{46656}$, ce qui donne aussi $u^3 + v^3 = \frac{73}{108}$. Or deux nombres dont on connaît la somme S et le produit P sont racines du polynôme $X^2 - SX + P$.

Ainsi, on s'intéresse aux racines du polynôme $X^2 - \frac{73}{108}X + \frac{2197}{46656}$. D'où on a deux racines :

$$x_{\pm} = \frac{73 \pm 6\sqrt{87}}{216}$$

Donc

$$u = \frac{\sqrt[3]{73+6\sqrt{87}}}{6}, \quad v = \frac{\sqrt[3]{73-6\sqrt{87}}}{6}.$$

Ainsi, on a une solution réelle

$$\alpha_1 = x + \frac{1}{6} = u + v + \frac{1}{6} = \frac{\sqrt[3]{73+6\sqrt{87}}}{6} + \frac{\sqrt[3]{73-6\sqrt{87}}}{6} + \frac{1}{6} \approx 1,4376.$$

De plus, nous avons deux solutions complexes. On peut les extraire grâce à cette propriété :

Propriété. Si r est racine cubique d'un nombre complexe w , alors les trois racines cubiques de w sont r, jr et j^2r , où $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

En effet, u est une racine cubique de x_+ , d'où ju et j^2u aussi. De même, v est une racine cubique de x_- , donc jv et j^2v aussi. Or, nous devons garder la condition initiale $3uv - \frac{13}{12} = 0$, donc on a deux autres solutions possibles, $x = ju + j^2v$ et $x = j^2u + jv$. D'où

$$\alpha_2 = ju + j^2v + \frac{1}{6}, \quad \alpha_3 = j^2u + jv + \frac{1}{6}.$$

Ainsi

$$\alpha_2 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{73+6\sqrt{87}}}{6} + e^{i\frac{4\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{73-6\sqrt{87}}}{6} + \frac{1}{6} \approx -0,46878 + 0,35785i.$$

et

$$\alpha_3 = e^{i\frac{4\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{73+6\sqrt{87}}}{6} + e^{i\frac{2\pi}{3}} \frac{\sqrt[3]{73-6\sqrt{87}}}{6} + \frac{1}{6} \approx -0,46878 - 0,35785i.$$

Donc

$$\alpha_1 \approx 1,4376$$

$$\alpha_2 \approx -0,46878 + 0,35785i \approx 0,58975 e^{2,4896i}$$

$$\alpha_3 \approx -0,46878 - 0,35785i \approx 0,58975 e^{-2,4896i}.$$

Notons $r = 0,58975$ et $\theta = 2,4896$ (6), alors la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est de la forme

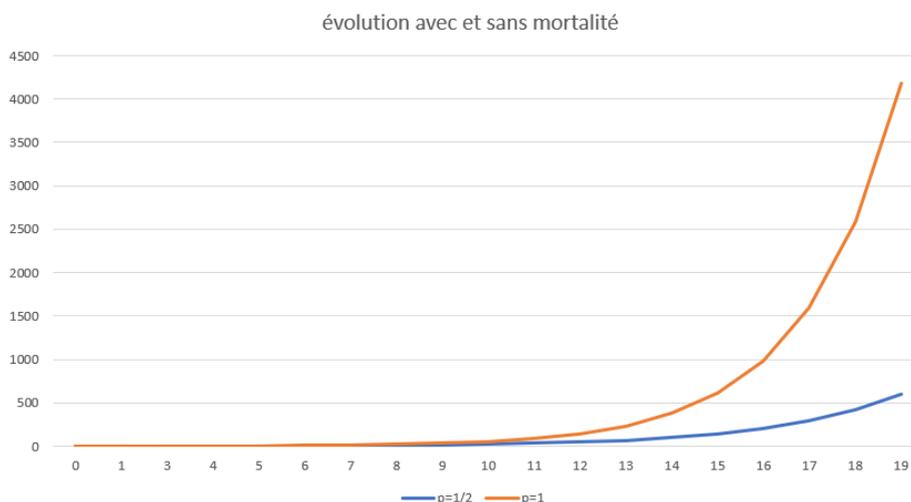
$$u_n = \beta_1 \alpha_1^n + \beta_2 r^n \cos(n\theta) + \beta_3 r^n \sin(n\theta), \quad \text{avec } (\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3.$$

Cela est vrai, car on peut encore montrer que les combinaisons linéaires des suites $(\alpha_1^n)_n$, $(r^n \cos(n\theta))_n$ et $(r^n \sin(n\theta))_n$ engendrent l'ensemble des suites qui vérifient la relation (4). La démonstration est très similaire à celle faite dans la section précédente donc par la suite, nous allons l'admettre.

Nous pouvons encore remarquer que si $\beta_1 \neq 0$ la suite diverge lorsque $n \rightarrow \infty$, car $r^n \rightarrow 0$ puisque $-1 < r < 1$ mais $\alpha_1^n \rightarrow \infty$ parce que $\alpha_1 > 1$. Néanmoins, il reste à vérifier que $\beta_1 \neq 0$. Pour faire cela nous allons résoudre le système donné par les conditions initiales :

$$\begin{cases} u_0 = \beta_1 + \beta_2 \\ u_1 = \beta_1 \alpha_1 + \beta_2 r \cos(\theta) + \beta_3 r \sin(\theta) \\ u_2 = \beta_1 \alpha_1^2 + \beta_2 r^2 \cos(2\theta) + \beta_3 r^2 \sin(2\theta) \end{cases}$$

Nous allons résoudre ce système linéaire avec le logiciel **Wolfram Alpha** [1]. Par surcroît, la résolution s'effectue de manière similaire à celle dans le paragraphe 3.1.4. D'où, si nous prenons, $u_0 = 1$, $u_1 = 1$ et $u_2 = 2$ alors on a $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (0,873225; 0,126775; -0,5475)$. Ainsi, $\beta_1 \neq 0$ donc $(u_n)_n$ diverge. En effet, nous pouvons nous apercevoir que la vitesse de croissance est nettement différente.



3.3. Généralisation (cas des parents)

3.3.1 Généralisation

À présent, nous allons essayer de généraliser cela, c'est-à-dire que nous allons nous intéresser à un coefficient χ que nous appellerons **coefficient de mortalité**.

Supposons qu'à chaque instant n , $t\%$ des parents meurent, alors nous avons l'égalité $\chi = 1 - t$. De la même manière qu'avec le cas $\chi = 0,5$, nous allons calculer les premiers 4 termes et écrire u_{n+3} comme une combinaison linéaire des trois termes précédents.

	<i>Enfants</i>	<i>Adultes</i>	<i>Parents</i>	<i>Total</i>
u_n	a	b	c	$a + b + c$
u_{n+1}	$c + b$	a	$b + c\chi$	$a + 2b + c(1 + \chi)$
u_{n+2}	$a + b + c\chi$	$c + b$	$a + b\chi + c\chi^2$	$2a + b(2 + \chi) + c(1 + \chi + \chi^2)$
u_{n+3}	$a + b\chi + c\chi^2 + c + b$	$a + b + c\chi$	$c + b + a\chi + b\chi^2 + c\chi^3$	$a(2 + \chi) + b(3 + \chi + \chi^2) + c(2 + \chi + \chi^2 + \chi^3)$

Posons à nouveau $u_{n+3} = \xi_1 u_{n+2} + \xi_2 u_{n+1} + \xi_3 u_n$ avec $(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \in \mathbb{R}^3$. Cette fois nous trouvons

$$(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = (\chi, 1, 1 - \chi)$$

ce qui donne

$$u_{n+3} = \chi u_{n+2} + u_{n+1} + (1 - \chi)u_n \quad (5)$$

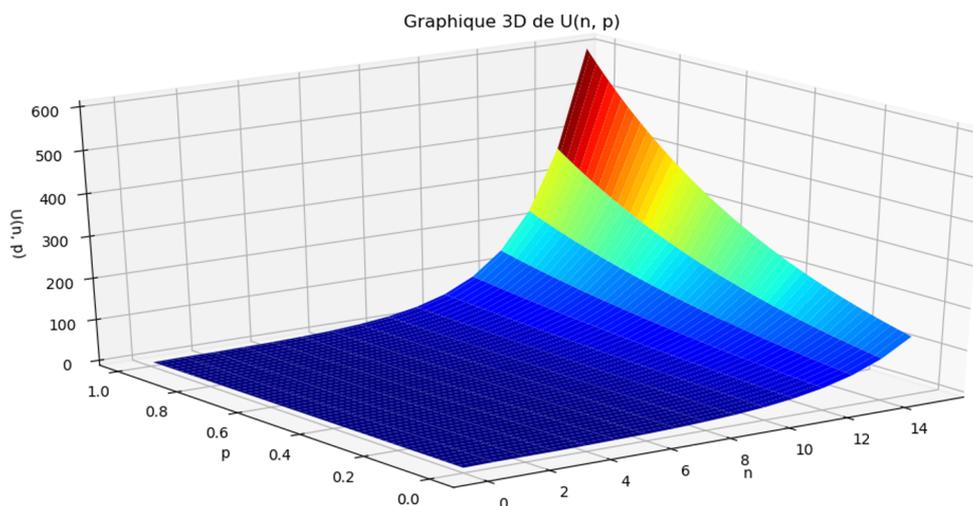
Nous remarquons d'abord que cela est cohérent avec l'exemple précédent car avec $\chi = 0,5$ nous retrouvons l'équation (4).

En outre, nous nous apercevons que même avec $\chi = 0$, c'est-à-dire 100% de mortalité la suite diverge. En effet, nous obtenons $u_{n+3} = u_{n+1} + u_n$ et les solutions de l'équation associée $\alpha^3 = \alpha + 1$ sont $\alpha_1 = 1,3427$, $\alpha_2 = 0,86884 e^{2,4377i}$ et $\alpha_3 = 0,86884 e^{-2,4377i}$, donc il existe $(\beta_1, \beta_2, \beta_3) \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$u_n = \beta_1 (1,3427)^n + \beta_2 (0,86884)^n \cos(2,4377n) + \beta_3 (0,86884)^n \sin(2,4377n).$$

et nous voyons clairement que $u_n \rightarrow \infty$ lorsque $n \rightarrow \infty$ à cause du premier terme qui est le seul qui ne tend pas vers 0 et qui est donc le responsable de la nature non convergente de la suite si $\beta_1 \neq 0$.

Nous proposons un graphique de la suite en fonction du taux de mortalité (noté p) et n :



En conclusion, nous pouvons en déduire que la suite (u_n) ne converge jamais et l'effectif total d'individus croît de manière exponentielle avec une vitesse de croissance différente, qui change selon le taux de mortalité χ .

3.4. Généralisation

Jusqu'ici, nous nous sommes restreints au cas des parents, alors cherchons maintenant à aller plus loin et à décrire l'évolution de la population animale avec un nombre arbitraire de classes d'âges.

3.4.1 Analyse du problème

Par définition, nous avons

$$u_n^{(k)} = \sum_{k=0}^{\kappa} \eta_n^k \quad (6)$$

où η_n^k est l'effectif total d'individus faisant partie de la k -ème classe d'âge à l'instant n , κ est la plus grande classe d'âge et $I = \{0, \dots, \kappa\}$.

Donc si nous voulons trouver la suite $(u_n^{(\kappa)})_n$ le problème se réduit à trouver les suites $(\eta_n^k)_n$ pour tout $k \in I$.

Essayons de trouver une formule de récurrence pour les suites $(\eta_n^k)_n$. Dans ce modèle-ci, nous allons supposer que seulement la dernière classe d'âge meurt avec un taux de mortalité χ et que chaque couple d'individu fait un couple d'enfants à chaque instant n pour toute classe d'âge sauf pour les enfants.

Cela donne

n	η_n^0	...	η_n^k	...	η_n^κ
$n+1$	$\sum_{k \in I^*} \eta_n^k$...	η_n^{k-1}	...	$\eta_n^{\kappa-1} + \chi \eta_n^\kappa$

Donc, nous obtenons le système suivant :

$$\begin{cases} \eta_{n+1}^0 = \sum_{k \in I^*} \eta_n^k \\ \eta_{n+1}^k = \eta_n^{k-1} \quad \text{pour tout } k \in I^* - \{\kappa\} \\ \eta_{n+1}^\kappa = \eta_n^{\kappa-1} + \chi \eta_n^\kappa \end{cases} \quad (7)$$

Nous pouvons réécrire cela sous forme vectorielle puis matricielle :

$$\begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \eta_n^0 + \dots + \eta_n^\kappa \\ \eta_n^0 \\ \vdots \\ \eta_n^{k-1} \\ \vdots \\ \eta_n^{\kappa-1} + \chi \eta_n^\kappa \end{pmatrix}$$

donc

$$\begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \chi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \eta_n^0 \\ \eta_n^1 \\ \vdots \\ \eta_n^k \\ \vdots \\ \eta_n^\kappa \end{pmatrix}$$

Alors notons :

$$\Lambda_{n+1}^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \eta_{n+1}^0 \\ \eta_{n+1}^1 \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^k \\ \vdots \\ \eta_{n+1}^\kappa \end{pmatrix} \quad \Lambda_n^{(\kappa)} = \begin{pmatrix} \eta_n^0 \\ \eta_n^1 \\ \vdots \\ \eta_n^k \\ \vdots \\ \eta_n^\kappa \end{pmatrix} \quad \Gamma(\chi) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 1 & 1 \\ 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & \chi \end{pmatrix}$$

Nous avons la relation de récurrence suivante :

$$\Lambda_{n+1}^{(\kappa)} = \Gamma(\chi) \Lambda_n^{(\kappa)}. \quad (8)$$

Comme pour les suites géométriques du type $u_{n+1} = qu_n$ où il se trouve que $u_n = q^n u_0$, ici nous avons le théorème suivant.

Théorème. Soient A une matrice carrée d'ordre k et (U_n) la suite de matrices colonnes de taille $k \times 1$ définie, pour tout $n \in \mathbb{N}$, par U_0 et $U_{n+1} = AU_n$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $U_n = A^n U_0$.

Ainsi

$$\Lambda_n^{(k)} = \Gamma(\chi)^n \Lambda_0^{(k)}, \quad (9)$$

où $\Lambda_0^{(k)}$ est le vecteur qui contient les conditions initiales du problème.

Il s'avère que les coordonnées du vecteur $\Lambda_n^{(k)}$ sont exactement les η_n^k que nous cherchons.

Comme $\Lambda_n^{(k)} \in \mathbb{R}^{k+1}$, prenons une application π_k qu'à chaque vecteur associe sa k -ème coordonnée :

$$\begin{aligned} \pi_k : \mathbb{R}^{k+1} &\longrightarrow \mathbb{R} \\ \Lambda_n^{(k)} &\longmapsto \eta_n^k \end{aligned}$$

Alors nous avons

$$\boxed{u_n^{(k)} = \sum_{k \in I} \pi_k(\Gamma(\chi)^n \Lambda_0^{(k)})}. \quad (10)$$

Nous avons donc trouvé une expression de la suite $(u_n^{(k)})_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ où interviennent le vecteur qui a comme coordonnées les conditions initiales et une certaine matrice $\Gamma(\chi)$ connue qui dépend du coefficient de mortalité (7).

4. Conclusion

En somme, nous pouvons constater que ces différents modèles sont de plus en plus réalistes. En effet, le premier modèle néglige la mortalité et cela ne peut pas être le cas d'un modèle bien construit. Néanmoins, même en ayant introduit la mortalité dans les modèles suivants, nous n'avons considéré cela que pour la dernière classe d'âge et dans la réalité cela n'est pas forcément le cas. Nous aurions pu donner un coefficient de mortalité à chaque classe d'âge et cela aurait pu améliorer ce modèle (8).

Références

- [1] Wolfram|Alpha : Computational Intelligence, <http://wolframalpha.com>. Accessed 30 June 2023.

Notes d'édition

- (1) En effet, on n'exclut ici que le cas où tous les termes sont nuls : les effectifs u_n sont des entiers naturels, et u_1 est égal à u_0 plus le nombre de parents au temps 0, également positif ou nul, donc $u_0 > 0$ implique aussi $u_1 > 0$ alors que si $u_0 = 0$, u_1 et tous les termes suivants sont nuls.
- (2) Ici, le résultat peut être inversé selon le choix des valeurs de u_0 et u_1 . Par exemple lorsque $u_0 = 1$ et $u_1 = 2$ on a $v_1 = 3/2 < v_3 = 8/5 < v_2 = 5/3 < v_0 = 2$ et la même démonstration montre que la suite (v_{2n}) est décroissante et la suite (v_{2n+1}) croissante.
- (3) Une fois montré que (v_{2n}) est croissante, $v_{2n+3} < v_{2n+1}$ résulte directement de $v_{2n+2} > v_{2n}$.
- (4) A priori on a seulement $v_{2n+2} = f(f(v_n))$ donc il faut remplacer ici f par $f \circ f : x \mapsto f(f(x))$, et de même pour la suite des termes de rang impair. Mais $f(f(x)) = 1 + 1/(1 + 1/x) = (2x + 1)/(x + 1)$; l'équation $f \circ f(x) = x$ équivaut aussi à $x^2 = x + 1$ et la suite de la démonstration ne change pas.
- (5) Il s'agit de montrer que si $(u_n) \in \mathcal{A}$, il existe λ et μ tels que $u_n = \lambda\varphi^n + \mu(1 - \varphi)^n$ pour tout $n \geq 0$. Pour l'initialisation de la récurrence, il faudrait vérifier que l'on peut choisir ces coefficients de façon que $u_0 = \lambda + \mu$ et $u_1 = \lambda\varphi + \mu(1 - \varphi)$, et non pas montrer qu'en admettant ces deux égalités la propriété est vérifiée pour $n = 2$ et 3. Mais cette vérification est faite dans le paragraphe qui suit la démonstration (voir les formules (3) pour λ et μ).
- (6) Le module et l'argument de α_2 . Les valeurs données sont des approximations.
- (7) Il reste à trouver une version explicite de la matrice $\Gamma(\chi)^n$ en fonction de χ et de n . Pour procéder comme dans les paragraphes précédents, on peut chercher une relation de récurrence exprimant $u_{n+\kappa+1}^{(\kappa)}$ en fonction de $u_n^{(\kappa)}, \dots, u_{n+\kappa}^{(\kappa)}$, mais le traitement de cette récurrence impliquerait de résoudre une équation algébrique de degré $\kappa + 1$.
- (8) Pour que le modèle soit encore plus réaliste, on pourrait aussi donner un coefficient de natalité propre à chaque classe d'âge.