Le problème de Steiner

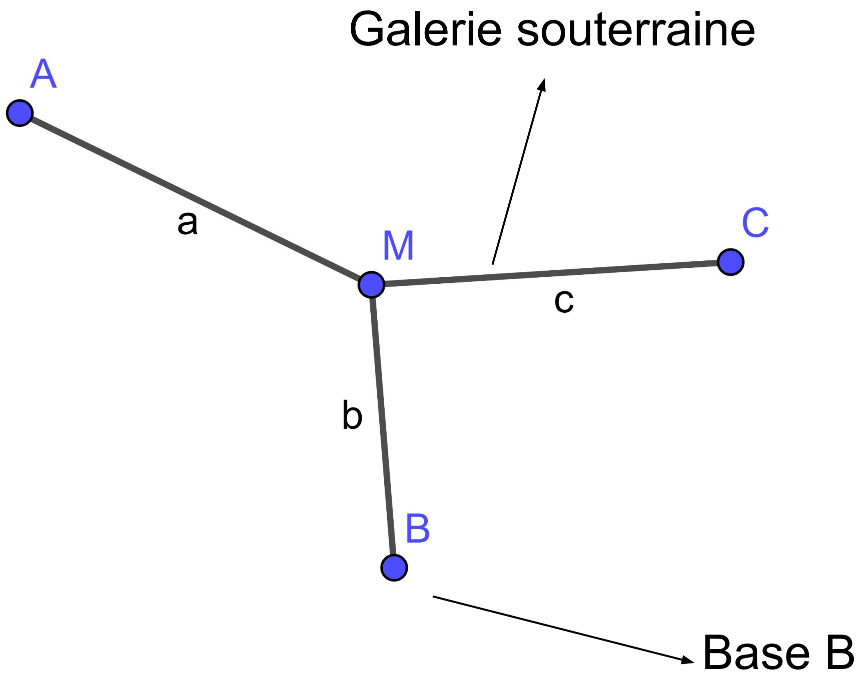
Elias Barbat, Arthur Dolgorouky, Chloé Jegu et Elsa Marquet.
Collèges Fleming et Alain fournier d'Orsay.

Le sujet

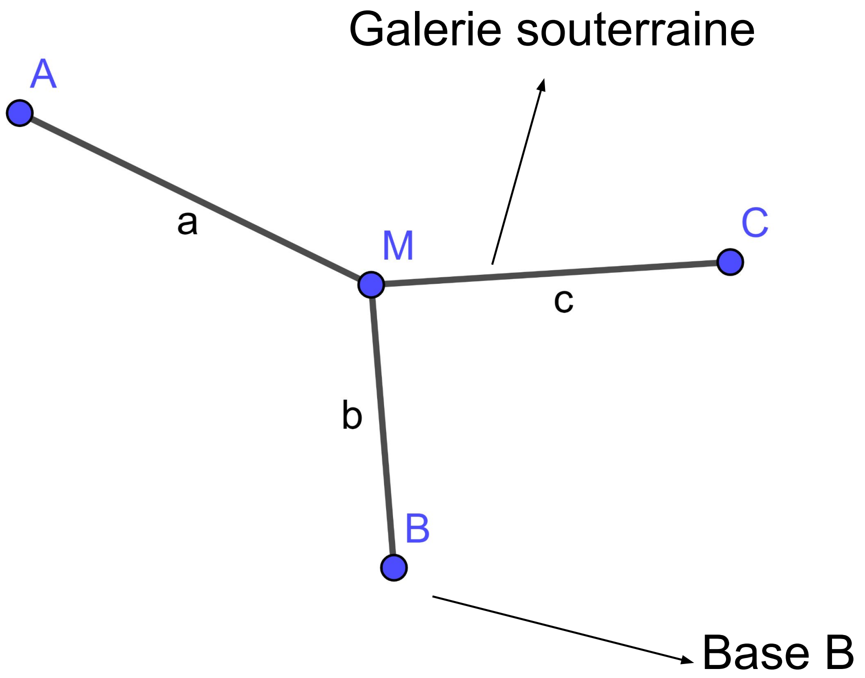
On souhaite relier trois bases souterraines en minimisant la longueur totale des galeries à creuser.

Comment s'y prendre ?

Compréhension du sujet



Compréhension du sujet



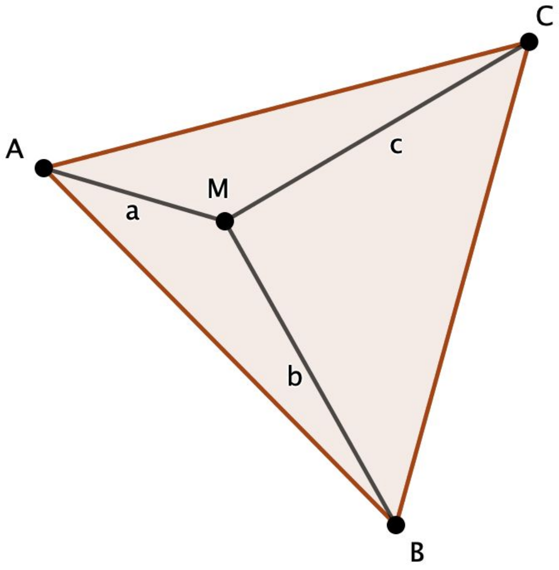
On veut que a+b+c soit la plus petite possible.

Début de la recherche

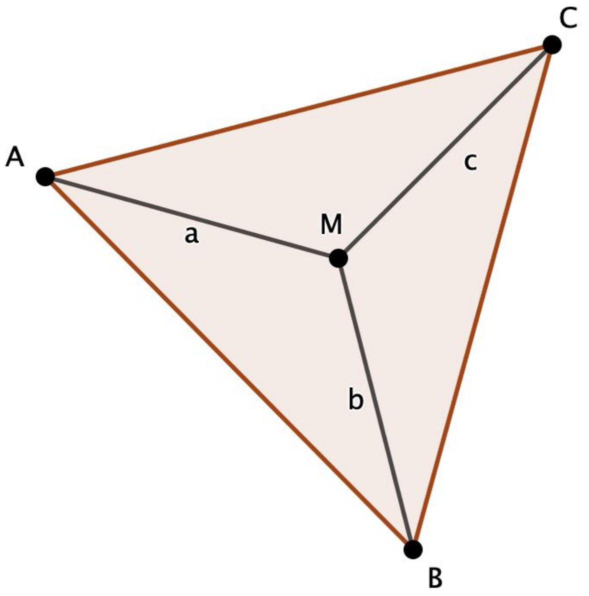
On a commencé à travailler sur Geogebra en bougeant le point M, et en faisant apparaître le calcul de la somme a + b + c pour essayer d’avoir le plus petit résultat possible.

On a décidé aussi de commencer par des cas particuliers.

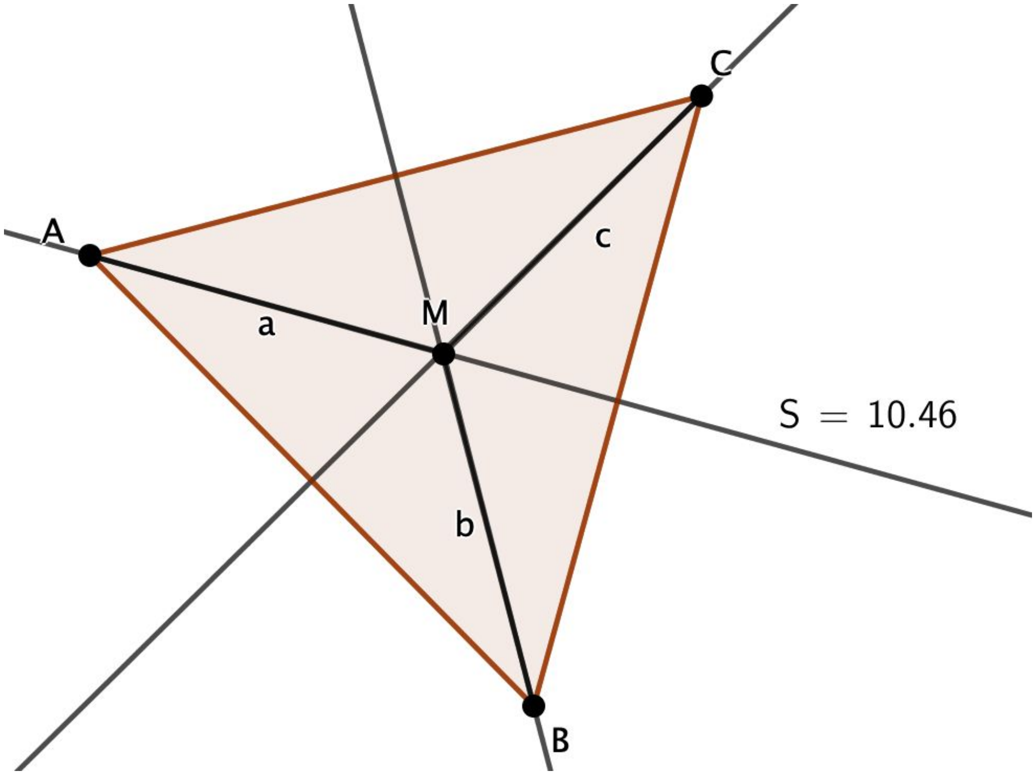
Cas du triangle équilatéral

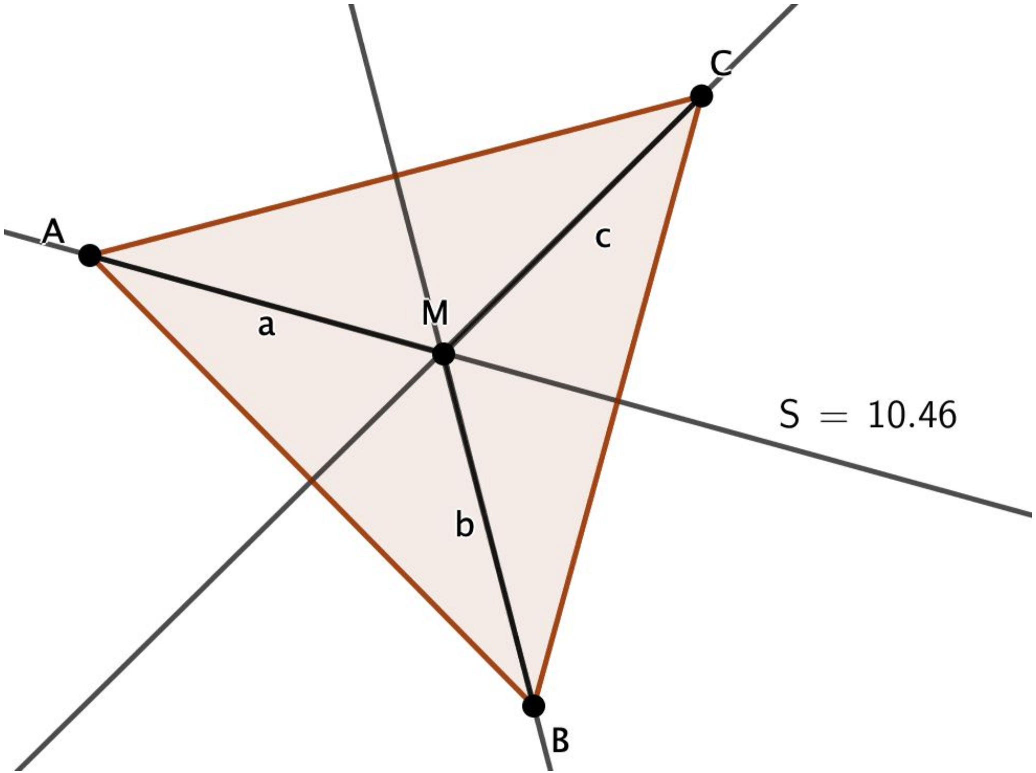


S = 10.73



S = 10.46

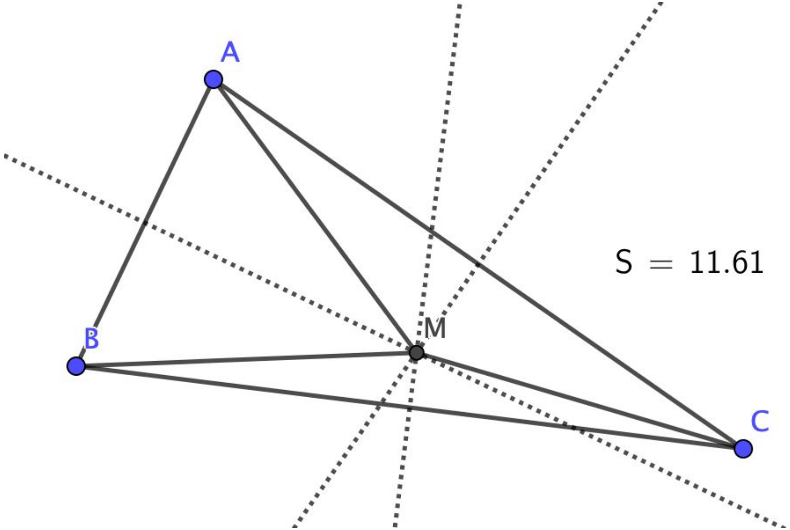

A
C
M
a
c
b
B
S = 10.46

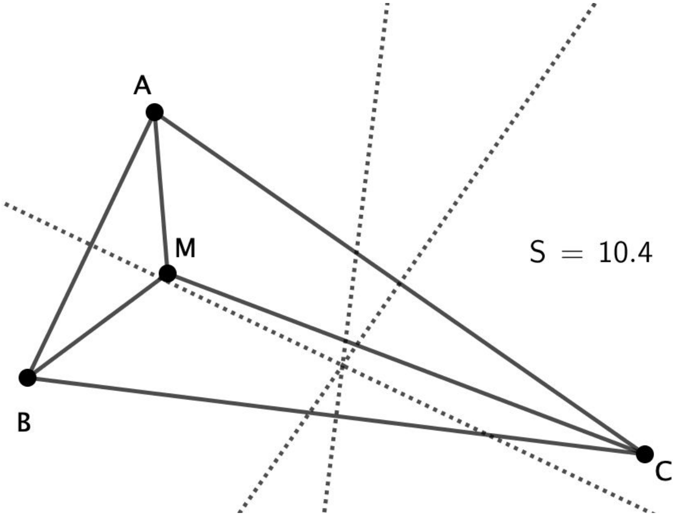


M semble être le point d’intersection des médiatrices du triangle formé par les bases A, B et C.

Cas du triangle quelconque

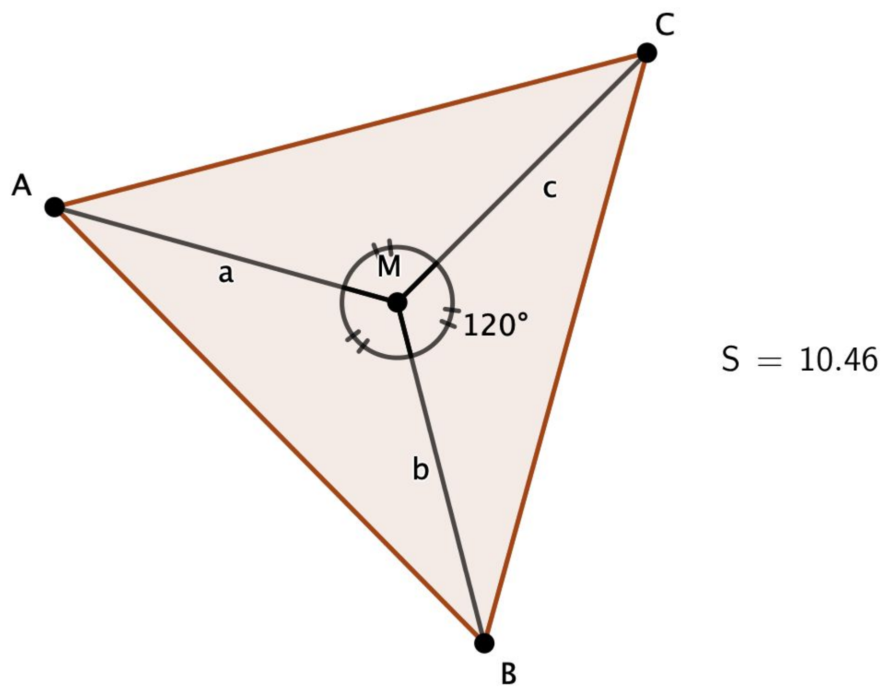
On a essayé de reprendre le résultat du triangle équilatéral où M est le point d’intersection des médiatrices.





Le point d’intersection des médiatrices n'est donc pas le point cherché.
On a cherché d’autres indications sur M.

Revenons au triangle équilatéral



Conjectures :

- Lorsque M est le point d'intersection des médiatrices du triangle, la somme cherchée est minimale.

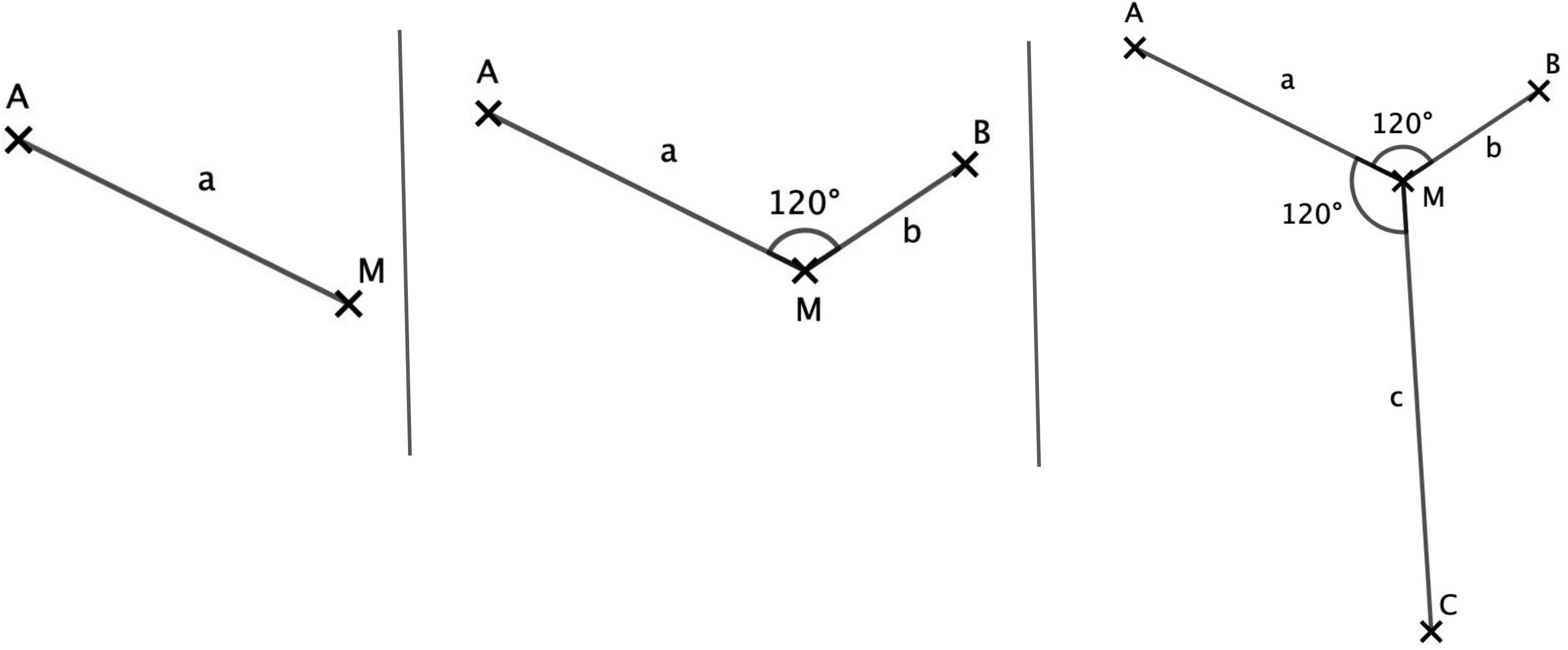
- Les angles AMB, BMC et CMA sont tous égaux à 120°.

Cas du triangle quelconque

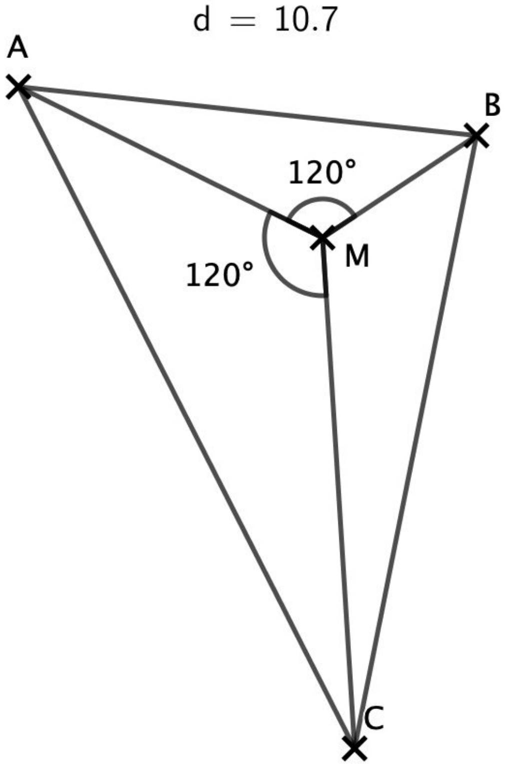
Dans le triangle quelconque, on a du mal a trouvé un point qui correspond à notre problème ; on va donc essayer de reprendre ce qu’on a observé dans le triangle équilatéral : les angles au centre qui font 120°.

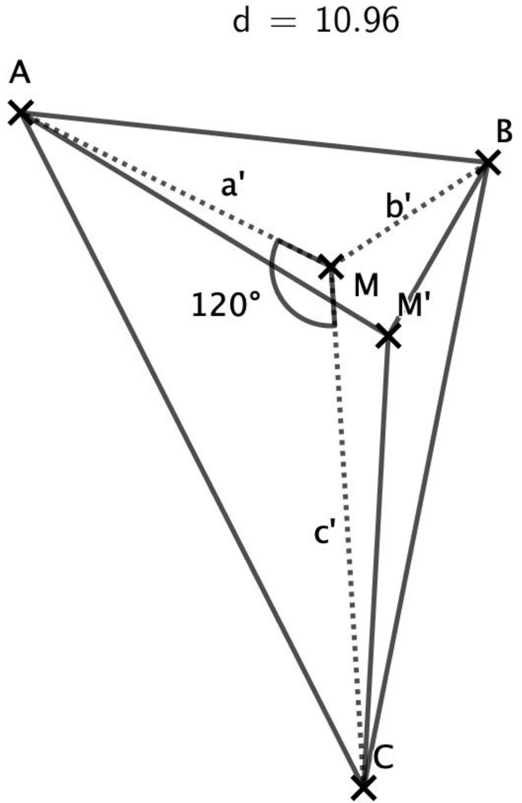
Problème : comment trouver ce point à partir de notre triangle ?

On a donc commencé par faire un point M, des angles de 120° et un triangle ABC quelconque.

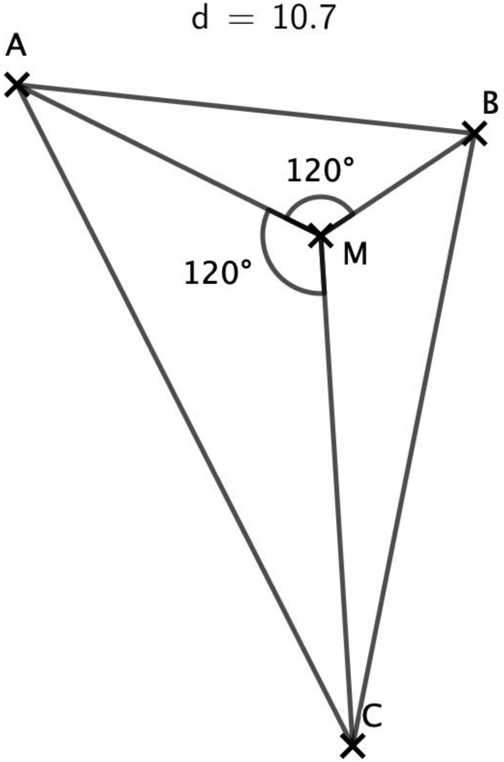


On a ensuite calculer sur Géogébra : a + b + c
et prendre d’autres points M’ pour comparer.





Nous n’avons pas trouvé mieux que M avec les 120°. Ce point semble être le meilleur, répondant à notre problème.

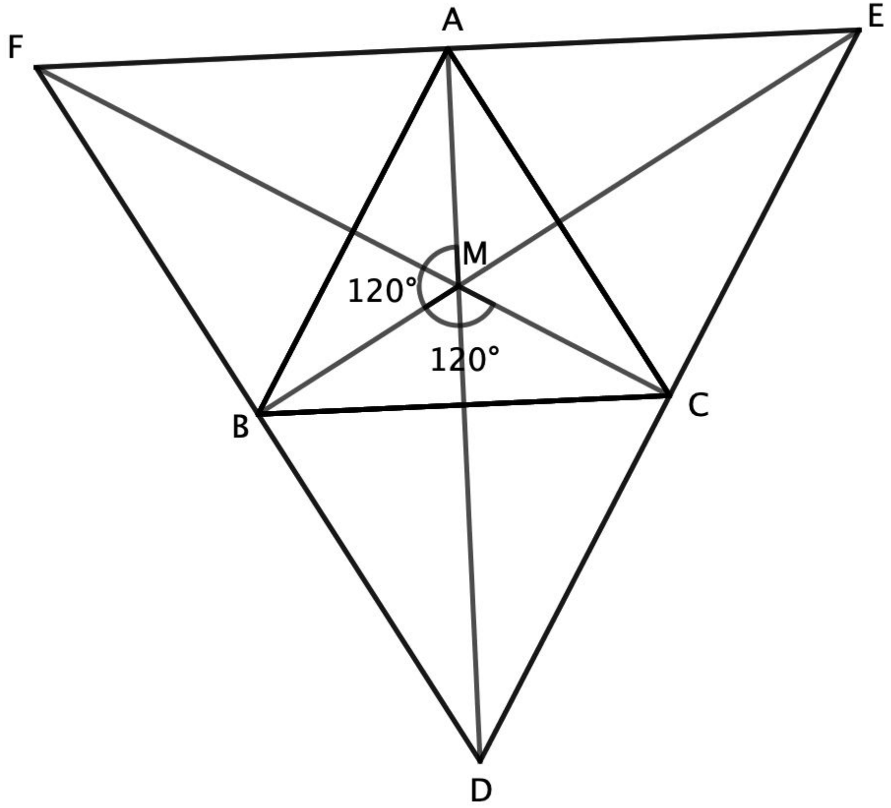


Il reste deux questions :

- Comment trouver ce point M à partir d’un triangle tracé ?

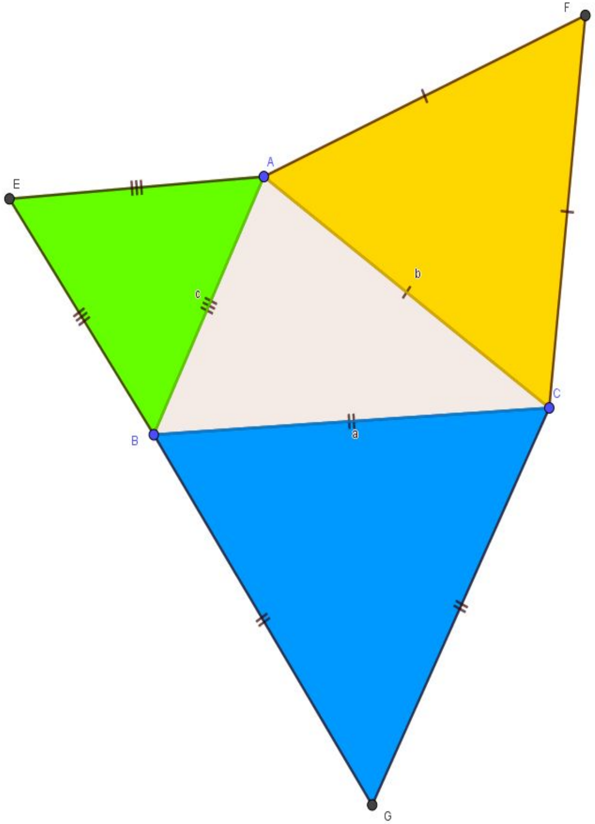
- Comment démontrer que c’est le meilleur ?

- Revenons encore au triangle équilatéral.

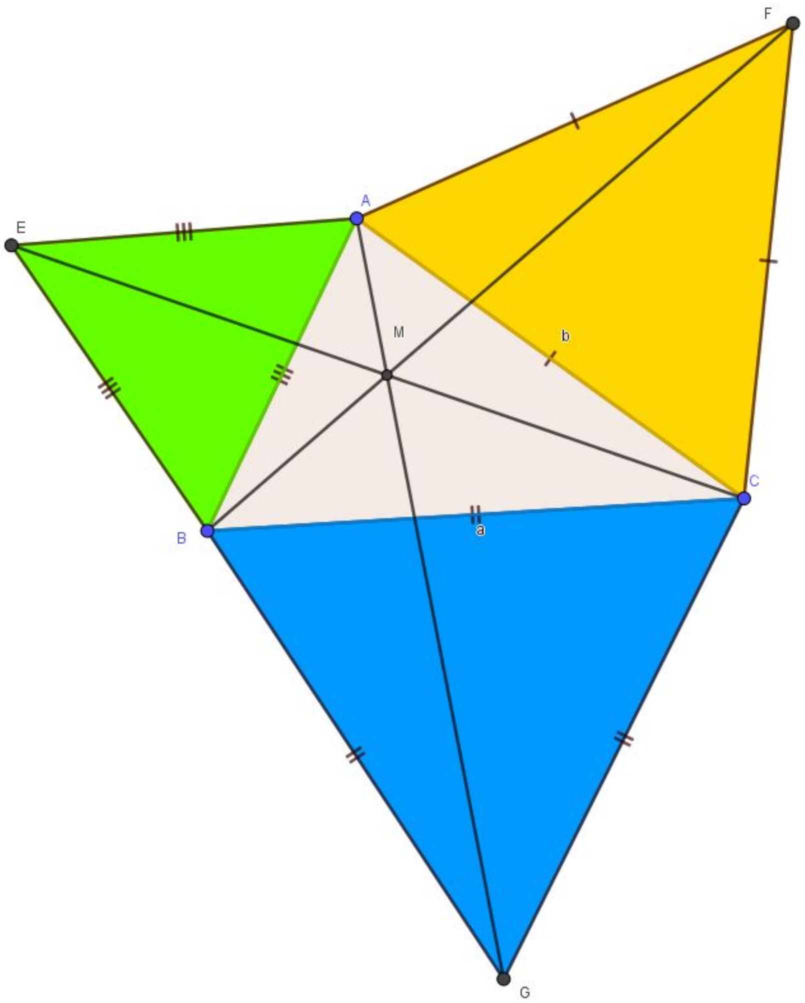


En prolongeant les médiatrices de ABC, on forme un autre triangle équilatéral DEF ainsi que EAC, CBD et AFB. Les segments [CF], [AD] et [BE] sont sécants en M.

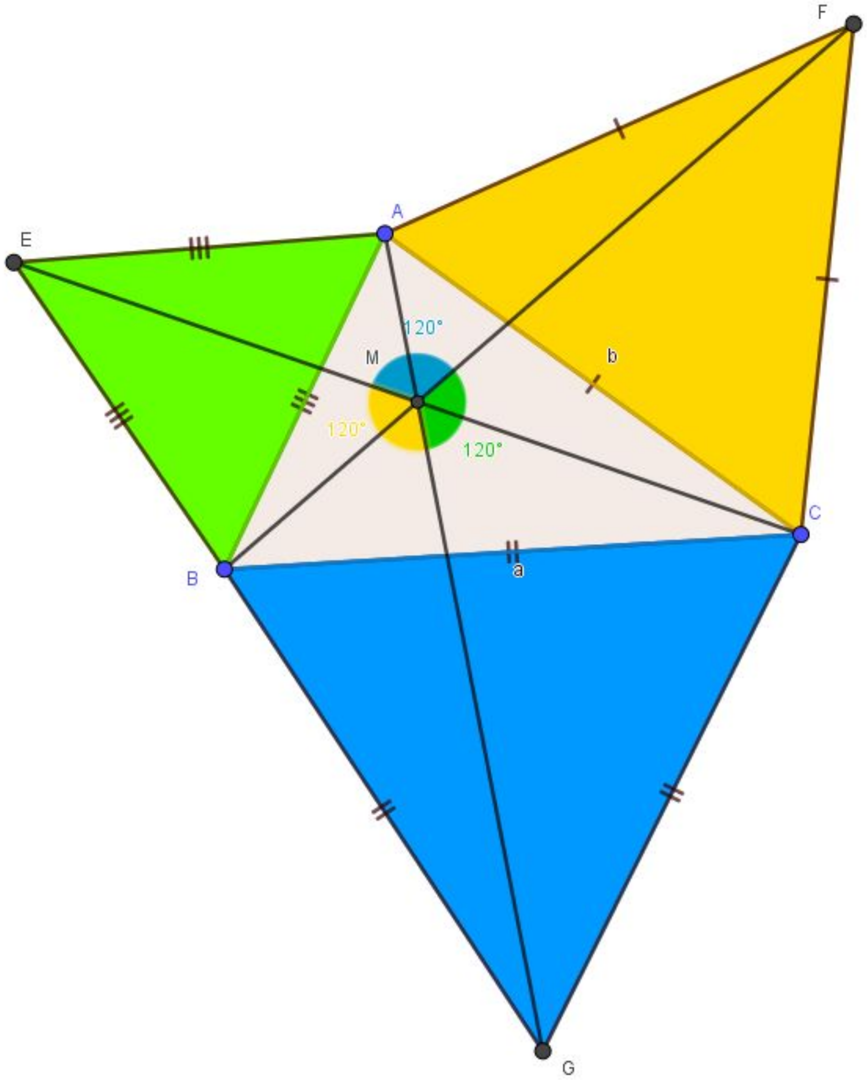
Revenons au triangle quelconque



On construit des triangles équilatéraux sur les côtés de ABC.



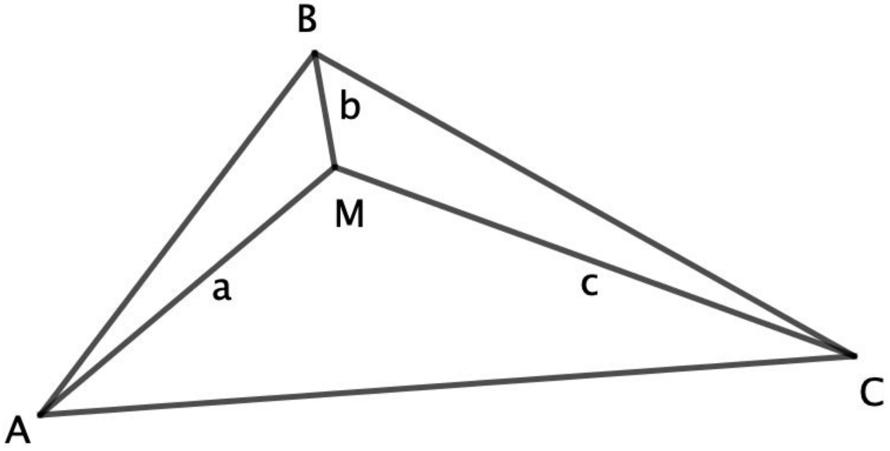
Le point M est l’intersection des droites (AG), (BF) et (CE).


F
A
E
120°
M
b
120°
120°
C
B
a
G

- On sait maintenant construire le point M.
- Démontrons que ce point M qui forme des angles de 120° est le meilleur.

1 -

On admet d'abord qu'il n'existe qu'un seul point ici M, tel que AM+BM+CM est minimal.

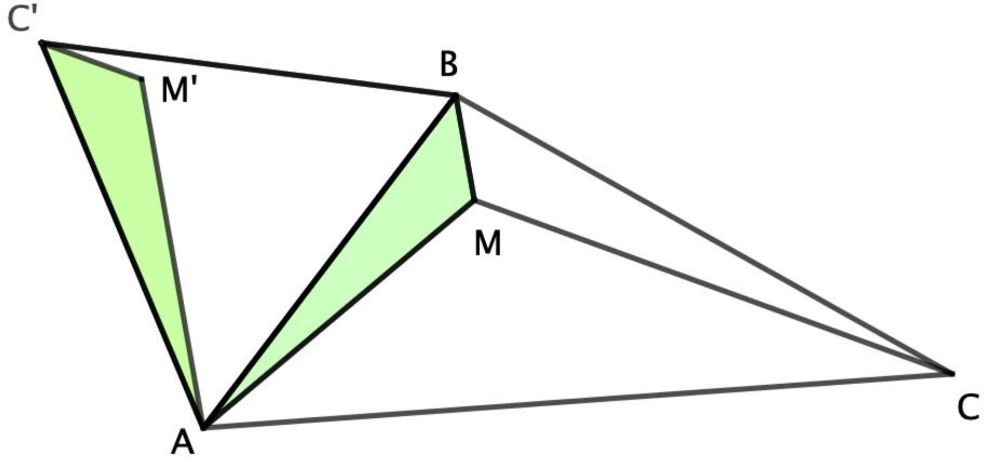


On construit AM’C' équilatéral et l’image de AMB par la rotation de centre A d’angle 60° sens antihoraire.

A $\longrightarrow$ A

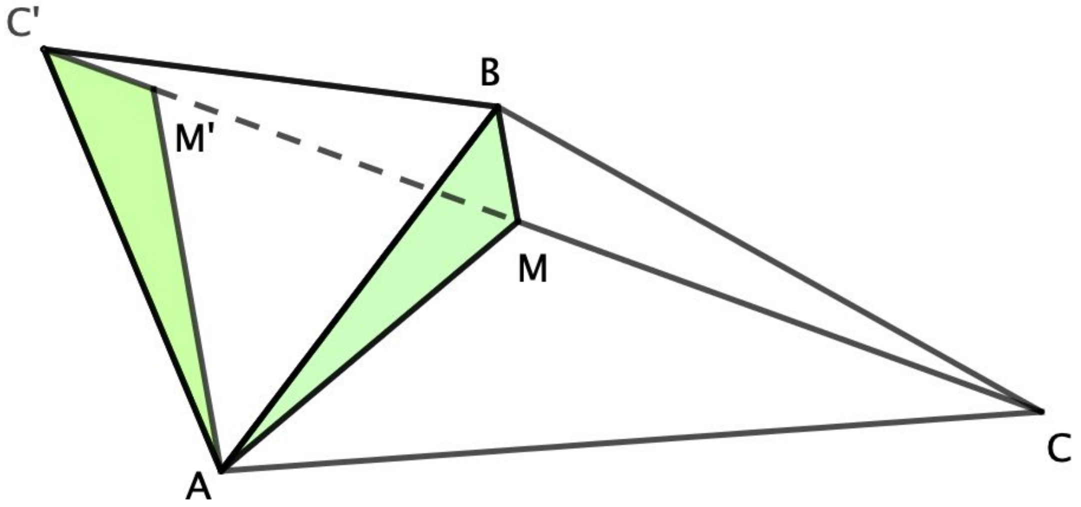
M $\longrightarrow$ M’

B $\longrightarrow$ C’



Par rotation : AM = AM’ donc AMM’est isocèle et l’angle(MAM’) vaut 60° donc AMM’ est équilatéral donc : AM = MM’.

On a aussi par rotation : BM = C’M’.



AM + BM + CM = MM’ + C’M’ + CM

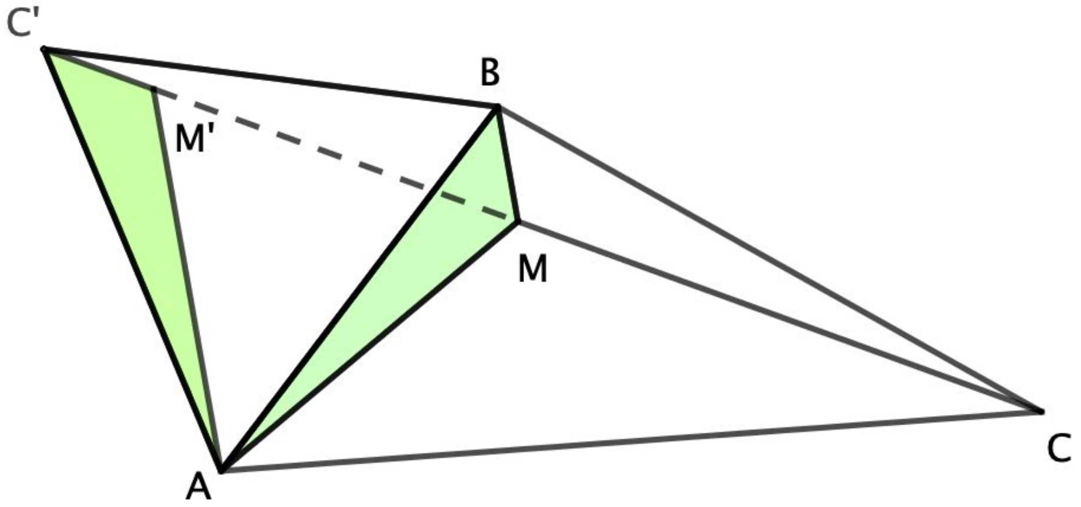
Ce sera minimal si C’, M’, M et C sont alignés.

On a donc M est sur [CC’]. On a alors :

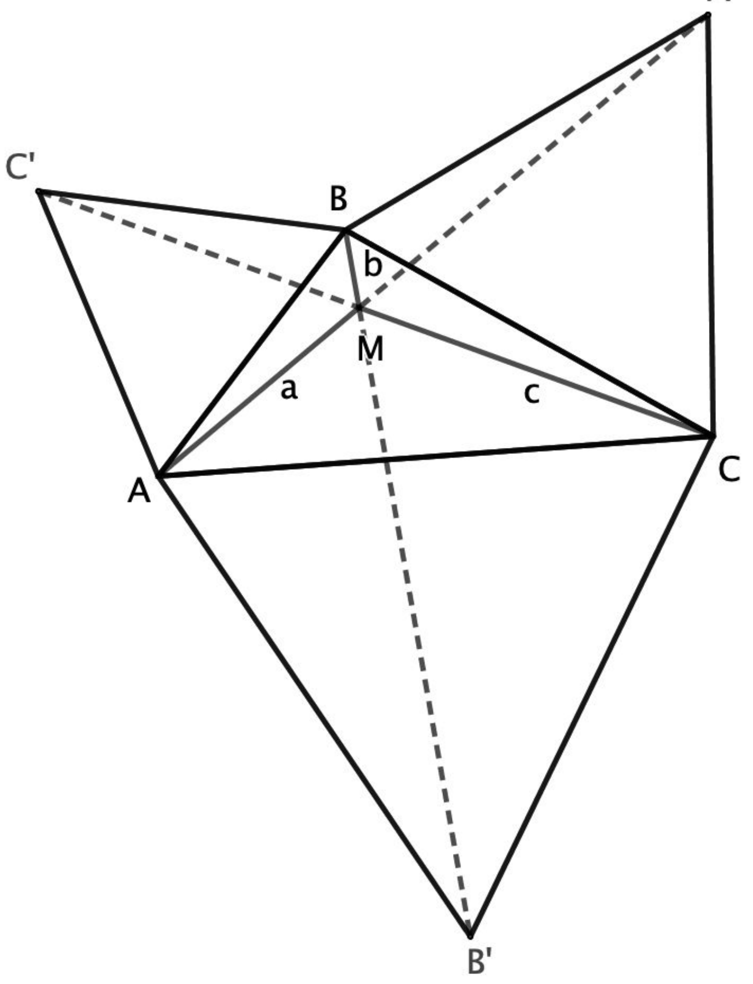
$\widehat{BMA} = \widehat{C'M'A}$

$= 180° - 60°$

$= 120°.$

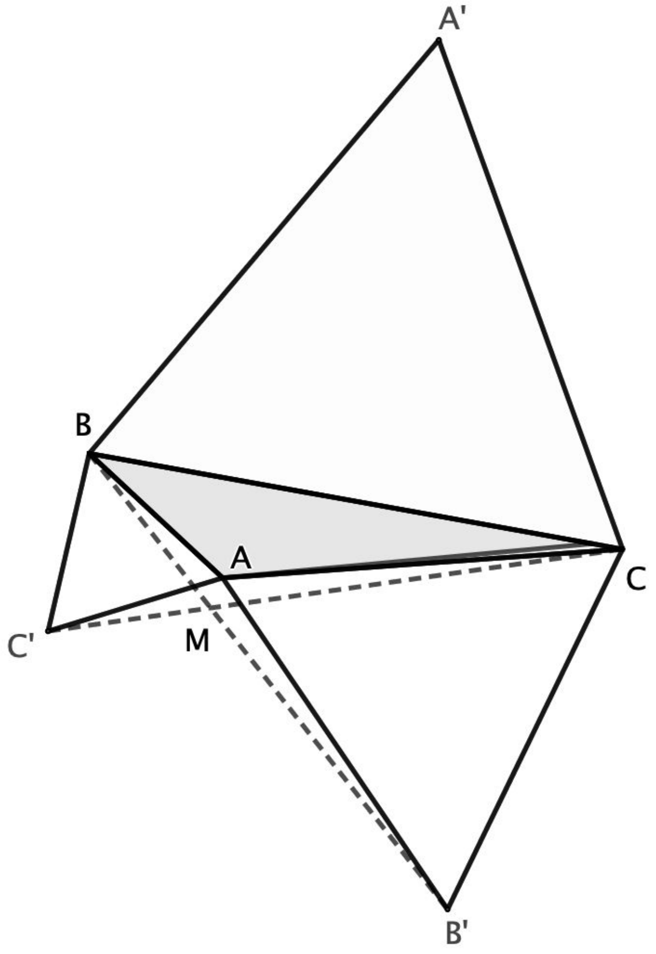


En raisonnant de même avec les autres triangles équilatéraux BCA’ et ACB’, on démontre que M est à l’intersection des droite (AA’), (BB’) et (CC’) et que : les angles en M font 120°.



Problème : cette démonstration est fausse si ABC a un angle supérieur à 120° !

Le point A est une meilleure position que M ici.



FIN