

Maximisation d'un pâturage

Année 2025 – 2026

Jeanne Monnier, Inès Dubois, Anoushka Vandermersch, élèves de Terminale

Établissement : Lycée Honoré d'Estienne d'Orves, Carquefou

Enseignant-e(s) : Mikaël Jousseau, Sandrine Bulliard

Chercheur : Romain Dugast, Laboratoire Jean Leray, Nantes.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Maxime décide de créer un nouveau pâturage pour ses vaches. Il dispose d'une clôture de longueur l ainsi que de n piquets.

Afin de rentabiliser son achat et de maximiser la satisfaction de son élevage, il souhaite faire en sorte de délimiter le plus grand espace possible.

Seulement, nous devons respecter certaines règles que l'on qualifiera de fondamentales :

- La clôture doit être tendue
- Elle ne peut pas être superposée sur elle même
- Le pâturage doit être fermé (les vaches ne doivent pas sortir)

On se demandera alors : **Quelle forme permettra à Maxime d'optimiser sa ferme ?**

2. Nos premières intuitions avec Geogebra

Nous avons tenté d'élaborer un « programme » sur Geogebra pour mettre en évidence la forme la plus adaptée, avec un périmètre l fixé et un nombre de piquets n fixé.

2.1. Exemple pour $n=3$

Quel triangle maximise l'aire entre un triangle équilatéral, isocèle, ou quelconque ?

Nous fixons un périmètre noté l à 30 unités. Nous fixons une base AB du futur triangle. Pour placer le sommet C, nous traçons une ellipse dont les 2 foyers sont A et B. C se placera sur l'ellipse ainsi formée pour que le périmètre reste fixé à 30 (*cf image 1*).

Comment l'ellipse a-t-elle été formée ? Pour fixer le périmètre, il faut que, une fois la base AB fixée, le sommet C soit fixé à des valeurs permettant la fixation du périmètre ici à 30 unités. Ainsi, le point C doit se déplacer sur une ellipse dont les 2 foyers sont A et B. Le périmètre sera ainsi fixé.

Un curseur permet de faire bouger le sommet C sur cette ellipse, formant alors différents triangles. Geogebra calcule, pour chaque position de C, l'aire du triangle formé. Une courbe de la valeur de l'aire du triangle en fonction de la position du point C est alors modélisée (cf image 2).

Image 1

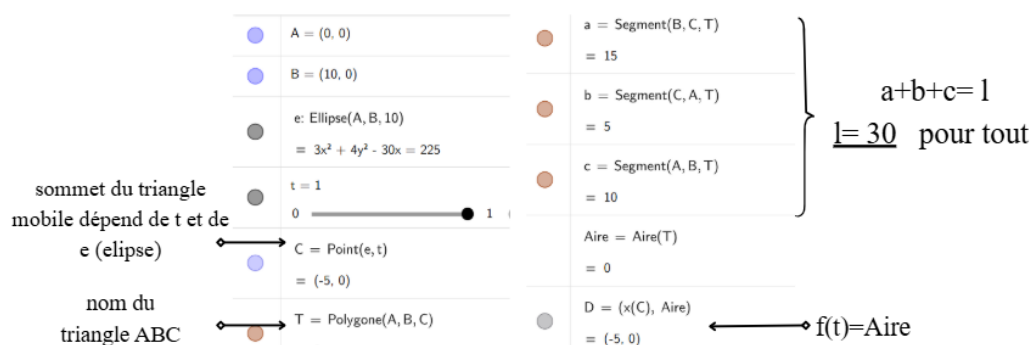
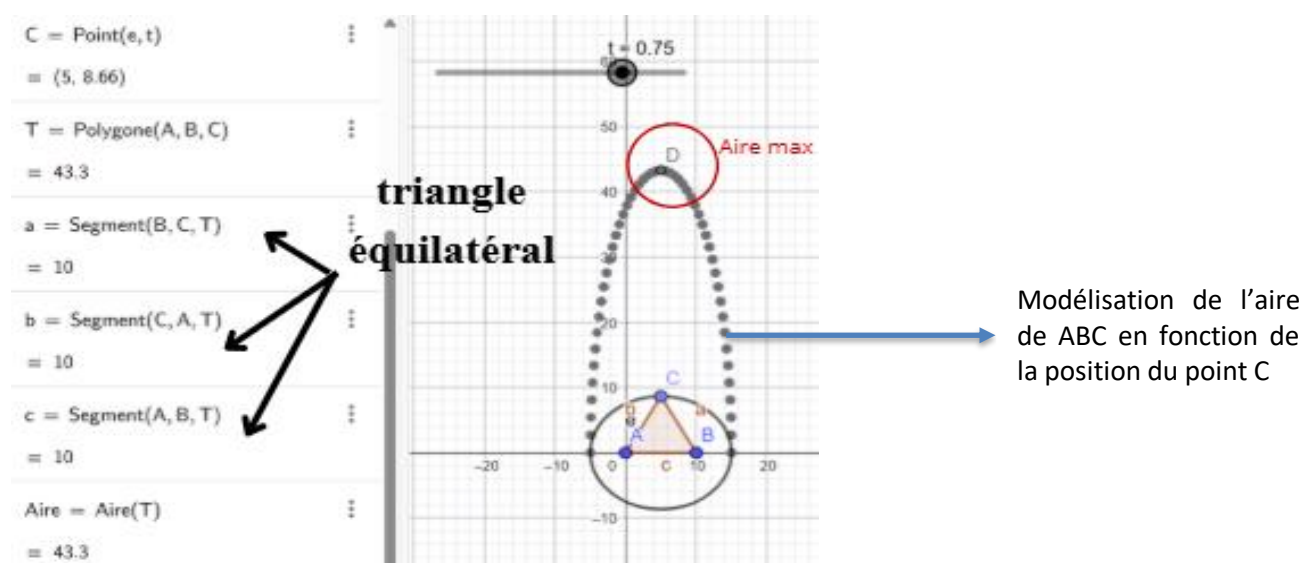


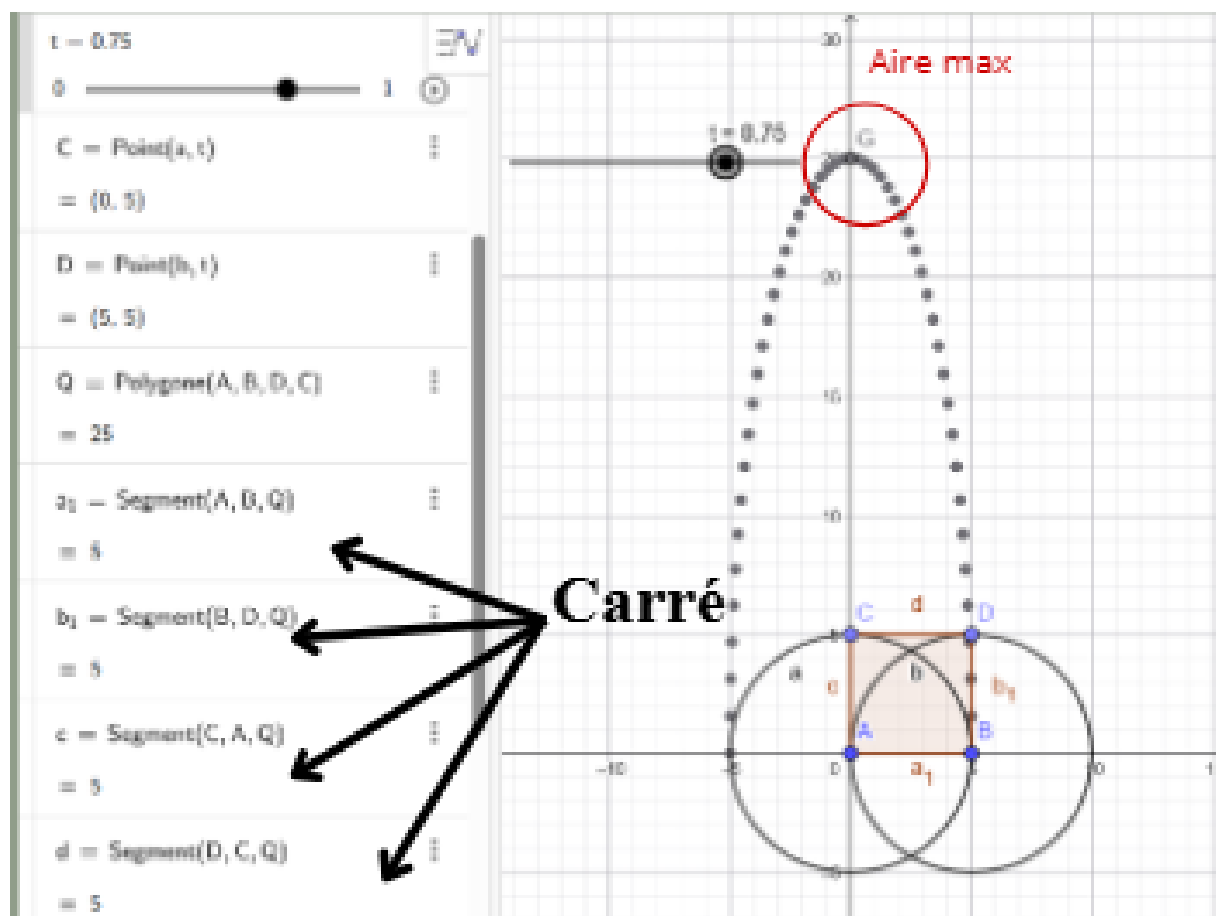
Image 2



Ici, nous remarquons que l'aire est maximisée quand les 3 côtés du triangle sont égaux, soit quand le triangle est équilatéral.

2.2. Exemple pour n=4, soit un quadrilatère

Nous avons procédé de la même manière avec un quadrilatère. Nous obtenons ce résultat. [\(1\)](#)



Ainsi, l'aire est maximisée quand le quadrilatère est régulier, dans ce cas, cela correspond à un carré.

2.3. Interprétation

Nous constatons que dans les deux cas, l'aire est maximale quand pour un périmètre l fixé, et un nombre de piquets n fixé, le polygone formé est régulier (carré, triangle équilatéral).

3. Et la convexité ?

Nous avons donc eu l'idée de respecter la convexité des formes que nous étudions.

On peut également expliquer la convexité par un segment que l'on trace à partir de deux points A et B quelconques compris dans la forme. Si le segment $[AB]$ formé est entièrement dans le polygone, c'est-à-dire qu'aucune partie du segment ne dépasse du polygone, cela signifie que celui-ci est convexe.

Dans le cas contraire, si une partie du segment se trouve à l'extérieur du polygone, il s'agit d'un polygone concave.

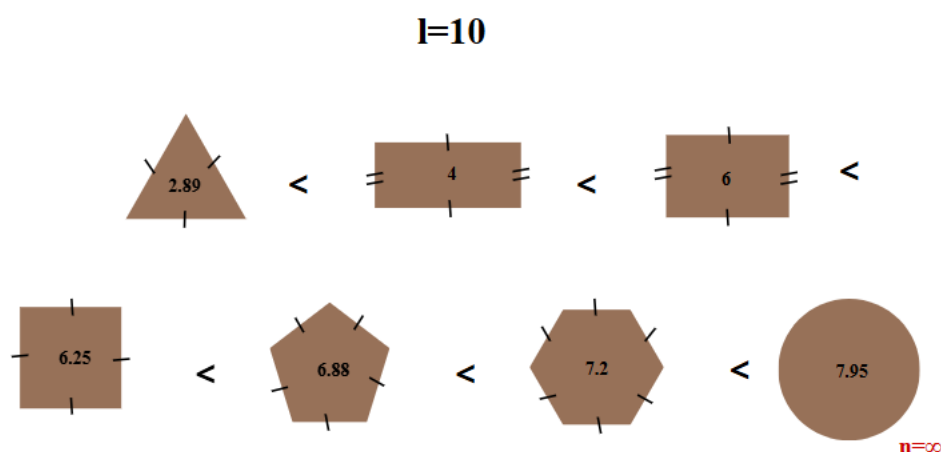
Pour maximiser son pâturage, Maxime ne doit tracer que des polygones convexes. Un polygone concave comporterait un renflement ou un trou. Ainsi, une partie de l'aire que Maxime pourrait obtenir avec une clôture d'une longueur définie ne serait pas utilisée et les vaches ne profiteraient pas du maximum de place que la clôture de Maxime pourrait leur offrir.

4. Exemples simples

Nous avons modélisé des polygones à n côtés et calculé leur aire avec des formules déjà connues. Dans le but de conjecturer la tendance de l'aire en fonction du nombre de côtés du polygone, nous avons fixé le périmètre à 10 car, dans le problème, Maxime dispose d'une clôture limitée, ainsi, le périmètre de notre polygone ne peut être infini.

Nous remarquons que l'aire était maximisée lorsque les polygones étaient réguliers.

De plus, nous remarquons que lorsque n tend vers l'infini, l'aire augmente. Ainsi, la forme optimale serait le cercle si Maxime avait un nombre de piquets « infini ».



5. Démonstration : la maximisation de l'aire d'un triangle isocèle

On cherche ici à montrer que l'aire du triangle isocèle est maximisée quand celui-ci est équilatéral.

5.1. L'aire d'un triangle isocèle

Soit abc un triangle isocèle avec $a = b$

On sait que $A = \frac{\text{base} \times \text{hauteur}}{2}$

Soit c la base du triangle, a les 2 cotés égaux, et l le périmètre du triangle,

$$c = l - 2a$$

On cherche la hauteur avec le théorème de Pythagore :

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{c}{2}\right)^2$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{c}{2}\right)^2}$$

car $c = l - 2a$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{l - 2a}{2}\right)^2}$$

$$h = \sqrt{a^2 - \left(\frac{1}{4}l^2 - al + a^2\right)} = \sqrt{-\frac{1}{4}l^2 + al}$$

On procède au calcul de l'aire dans le but d'étudier ses variations :

$$A = \frac{(l - 2a)\sqrt{-\frac{1}{4}l^2 + al}}{2}$$

$$A = \frac{(l - 2a)\sqrt{-l^2 + 4al}}{4}$$

Comme la fonction carrée est croissante sur $\mathbb{R}^+$, on peut passer l'aire au carré tout en conservant les variations de l'aire. Cela nous permet d'étudier une expression ne comportant pas de racine carrée.

$$A^2 = \frac{(l - 2a)^2(-l^2 + 4al)}{16}$$

$$A^2 = \frac{-l^4 + 8al^3 - 20a^2l^2 + 16a^3l}{16}$$

L'objectif étant d'étudier les variations de l'aire, nous dérivons l'expression obtenue.

Il convient de noter qu'ici la seule inconnue est a c'est-à-dire la longueur d'un côté du triangle. Le périmètre l est un réel fixé.

C'est ce qui nous permet d'obtenir la dérivée suivante, une fonction du second degré, dont nous savons étudier le signe.

$$(A^2)' = 3la^2 - \frac{5l^2}{2}a + \frac{l^3}{2}$$

5.2. La longueur optimale d'un côté

Nous avons donc cherché le signe de notre fonction. Nous avons un polynôme du second degré, nous avons utilisé le calcul du discriminant. Celui-ci étant supérieur à 0, deux racines sont admises. Nous obtenons alors comme racine : $r_1 = l/2$ et $r_2 = l/3$. Or, nous savons qu'un polygone ne peut pas avoir deux côtés (il ne serait pas fermé). Nous avons alors retenu $r_2 = l/3$. Cela signifie que l'aire est maximale pour $l/3$, c'est-à-dire un triangle dont les côtés sont égaux, soit un triangle équilatéral. L'aire est donc maximale lorsque le polygone est régulier et uniquement dans ce cas.

6. Démonstration : la maximisation de l'aire d'un triangle quelconque

Nous allons démontrer que l'aire du triangle est maximisée quand celui-ci est équilatéral, donc lorsqu'il s'agit d'un polygone régulier.

Pour ce faire, nous avons utilisé deux outils mathématiques

6.1. 1^{er} Outil : les inégalités arithmético-géométriques

Ces inégalités permettent d'affirmer que le produit de n inconnues est majoré par la moyenne de ces inconnues à la puissance n .

6.1.1. Exemple pour une inégalité arithmético-géométrique à 2 variables

6.1.1.a) L'inégalité

$$\lambda\mu \leq \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2$$

On observe que le chiffre 2 revient à trois reprises :

- Il y a **deux** inconnues : λ et μ
- Dans le membre de droite, la somme de ces deux inconnues est divisée par **2** (il s'agit de la moyenne de ces deux inconnues)
- Dans le membre de droite, la moyenne des inconnues est à la puissance de **2**

6.1.1.b) Démonstration de cette inégalité à 2 variables

$$\lambda\mu \leq \left(\frac{\lambda + \mu}{2}\right)^2$$

$$\sqrt{\lambda\mu} \leq \frac{\lambda + \mu}{2}$$

$$2\sqrt{\lambda\mu} \leq \lambda + \mu$$

$$4\lambda\mu \leq (\lambda + \mu)^2$$

$$4\lambda\mu \leq \lambda^2 + 2\lambda\mu + \mu^2$$

$$0 \leq \lambda^2 - 2\lambda\mu + \mu^2$$

$$0 \leq (\lambda - \mu)^2$$

On obtient qu'un nombre au carré est supérieur ou égal à 0, ce qui est toujours vrai. On peut donc affirmer que cette inégalité arithmético-géométrique d'ordre 2 est vraie.

6.2. 2^e Outil : la formule d'Héron pour calculer l'aire d'un triangle quelconque

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \quad \text{avec } p = \frac{a+b+c}{2}$$

6.3. Démonstration en utilisant ces deux outils

Il convient de noter que, dans cette démonstration, l'inégalité arithmético-géométrique est à 3 variables.

On pose : $\lambda = p - a$; $\mu = p - b$ et $\alpha = p - c$

$$p\lambda\mu\alpha \leq p\left(\frac{\lambda + \mu + \alpha}{3}\right)^3$$

Dans le membre de gauche, on a une expression très similaire à la formule de Héron. Il convient donc de passer à la racine carrée pour obtenir exactement cette formule. Nous pourrions ainsi affirmer que l'aire d'un triangle quelconque est majorée par la valeur du membre de gauche.

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \sqrt{p} \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + \alpha}{3}\right)^3}$$

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \sqrt{p} \sqrt{\left(\frac{\lambda + \mu + \alpha}{3}\right)^1 \left(\frac{\lambda + \mu + \alpha}{3}\right)^2}$$

$$\text{Or, } \lambda + \mu + \alpha = p - a + p - b + p - c = 3p - \frac{2(a+b+c)}{2} = 3p - 2p = p$$

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \sqrt{p} \sqrt{\frac{p}{3} \frac{p}{3}}$$

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \sqrt{\frac{p^2}{3} \cdot \frac{p}{3}}$$

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \sqrt{\frac{1}{3} \cdot \frac{p^2}{3}}$$

$$\sqrt{p\lambda\mu\alpha} \leq \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$$

$$A \leq \frac{\sqrt{3}}{9} p^2$$

On obtient finalement que l'aire A d'un triangle quelconque est majorée par la valeur $\frac{\sqrt{3}}{9} p^2$

6.4. Expression de l'aire d'un triangle équilatéral en fonction de p

Prenons un triangle abc.

On a tout d'abord :

$$p = \frac{a + b + c}{2} = \frac{3a}{2}$$

Car a = b = c

On en déduit que $a = \frac{2}{3} p$

Formule de l'aire d'un triangle :

$$A = \frac{B \cdot h}{2}$$

On sait que $B = a$

On calcule h en utilisant le théorème de Pythagore,

$$a^2 = h^2 + \left(\frac{1}{2}a\right)^2$$
$$h = \sqrt{a^2 - \frac{1}{4}a^2} = \sqrt{\frac{3}{4}a^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}a$$

Puis, on réalise le calcul de l'aire :

$$A = \frac{a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}a}{2}$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2$$

$$A = \frac{\sqrt{3}}{4} \left(\frac{2}{3}p\right)^2 = \frac{\sqrt{3} \cdot 4 \cdot p^2}{4 \cdot 9} = \frac{\sqrt{3}}{9}p^2$$

Donc l'aire d'un triangle équilatéral vaut $\frac{\sqrt{3}}{9}p^2$.

6.5. Conclusion de la démonstration

Ainsi, l'aire d'un triangle quelconque avec un périmètre fixé est majorée par l'aire d'un triangle équilatéral, donc lorsque ce polygone est régulier.

Dans le contexte du problème, cela signifie que lorsque Maxime dispose de 3 piquets, la forme qui lui permettra d'optimiser son pâturage est celle d'un triangle équilatéral.

7. Conclusion

Pour conclure, nous avons défini quelques règles que le pâturage de Maxime devra respecter pour que son aire soit optimisée.

- 1) Si Maxime dispose d'un nombre de piquets limité, il devra dessiner un polygone régulier et convexe.
- 2) Si Maxime dispose d'un nombre « illimité » de piquets, nous supposons qu'il doit dessiner un polygone dont la forme se rapproche le plus possible d'un cercle car l'aire semble maximisée dans ce cas-là.

Note d'édition

(1) Il semble que l'expérimentation porte sur la famille des losanges de longueur de côté fixée. Ce qui varie, c'est un angle intérieur du losange, qui décrit l'intervalle $[0^\circ, 180^\circ]$. C'est la valeur 90° qui rend l'aire la plus grande. Cette expérimentation est partielle, car tous les quadrilatères ne sont pas des losanges.