

Le monochrome bleu

Année 2024 – 2025

Salomé Brécourt, Jeanne Charré, Anna Kracklauer, Clothaire Nourry

Établissement : Ecole Européenne de Karlsruhe (Allemagne)

Enseignante : Nathalie Brasset

Chercheur : Louis Garénaux, Karlsruher Institut für Technologie.

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

En novembre, lorsque nous avons commencé Maths.en.Jeans, nous avons choisis un problème, ce problème, nous avons travaillé dessus pendant une année scolaire. Le voici :

Sarah est une pro du puzzle. Une amie lui demande de concevoir un puzzle à partir d'un monochrome bleu d'Yves Klein, voir la photo ci-dessous. Face à cette demande déconcertante, Sarah décide de créer un puzzle dont toutes les pièces sont différentes. Chaque pièce est un carré dont les bords sont soit plats, soit avec un creux, soit avec une bosse.

Quel est le plus grand puzzle (en nombre de pièces) que Sarah peut construire ? Y a-t-il plusieurs puzzles de cette taille ?



Source: artbasel.com

Figure 1 : notre problème

1.2. Résultats

Nous avons montré que le plus grand puzzle possible constitué de pièces avec les 3 motifs différents est un puzzle de 4×4 . Nous avons trouvé 8 puzzles 4×4 possibles et nous avons expliqué qu'il ne peut pas y en avoir plus de 16.

Nous avons aussi expliqué une méthode pour dénombrer les pièces quand nous avons plus de motifs. Avec 5 motifs nous avons expliqué qu'il y a entre 69 et 625 pièces possibles.

2. Présentation du problème

Pour y voir plus clair...

Dans un puzzle normal, on reconnaît quelles pièces vont ensemble grâce aux couleurs, aux motifs et à la forme de celles-ci.

Exemple : Les deux pièces sont rouges, on les met ensemble.
 Il y a un bout de soleil sur les deux pièces, on les met ensemble
 Une pièce a un creux, l'autre une bosse, on les met ensemble

Mais dans notre problème, le puzzle est monochrome (c'est à dire d'une seule couleur), ce qui veut dire que l'on ne peut, ni se fier aux couleurs, ni aux motifs, puisque tout est pareil. On ne peut donc que se fier qu'à la forme.

Conclusion : Toutes les pièces sont obligatoirement différentes, puisqu'on ne peut que se fier à leur forme.

Pour une meilleure compréhension du texte qui va suivre, nous allons définir le vocabulaire :

Motif plat	Motif convexe (bosse)	Motif concave (creux)
		

Ce vocabulaire a été choisi en raison de la forme des lentilles de lunettes. Les lentilles convexes sont bombées et celles concaves sont creuses.

Pièce d'angle : Type A	Pièce de bord : Type B	Pièce du centre : Type C
		
2 côtés plats	1 côté plat	Aucun bord plat

Dénombrer :

Compter l'ensemble d'un tout, recenser.

Dans notre cas, on va compter l'ensemble de toutes les pièces existantes : on va dénombrer les pièces.

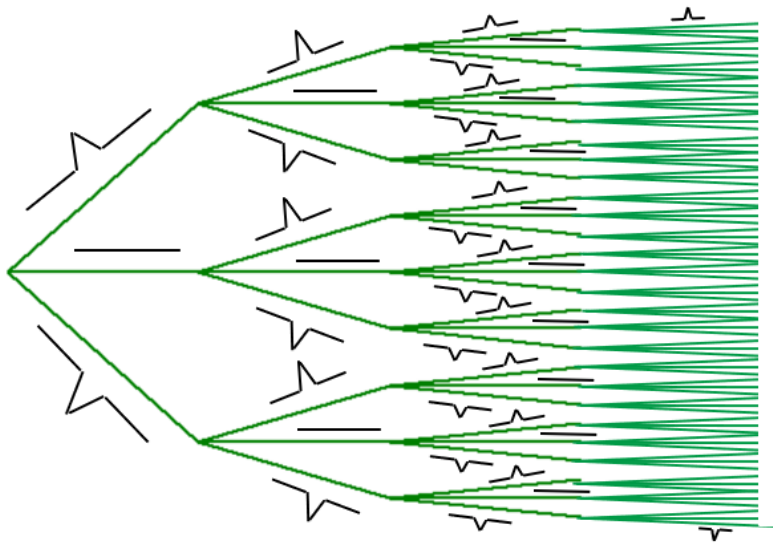
Les différents axes de notre travail correspondent aux grandes parties de notre article :

- Dénombrer les différentes pièces en utilisant 3 motifs possibles sur les côtés. (Partie 3)
- Construire le plus grand puzzle possible (Partie 4)
- Réfléchir à un problème plus complexe en utilisant 5 motifs possibles sur les côtés (Partie 5)

3. Dénombrement des pièces

La première partie de notre problème est de trouver le nombre de pièces existantes. Nous avons donc décidé de les dessiner toutes.

3.1. Nombre maximal de pièces



1 ^{er} côté	2 ^{ème} côté	3 ^{ème} côté	4 ^{ème} côté	TOTAL
3 choix	3 choix	3 choix	3 choix	$3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$

Sur cet arbre, chaque branche représente un motif. En prenant un chemin, nous avons un motif pour chaque côté.
Exemple : On commence par le côté gauche de la pièce et on prend les côtés successivement dans le sens des aiguilles d'une montre.

On prend la première branche (pour le premier côté), le motif convexe, puis le motif concave pour le deuxième, puis le motif convexe pour le troisième, puis le motif plat pour le quatrième côté. On obtient la pièce :



En comptant le nombre de chemins dans l'arbre on obtient le nombre de pièces maximum.

Conclusion :

Pour avoir le nombre maximal de pièces existantes, nous avons effectué un calcul simple : 3^4 .

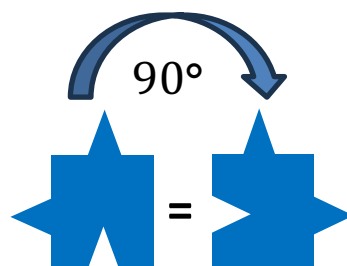
Pourquoi ?

Parce qu'il y a 3 motifs de côtés : motif convexe, motif concave et motif plat ; et qu'il y a 4 cotés. Donc il y a au maximum 81 pièces distinctes. Mais les 81 sont-elles vraiment différentes ?

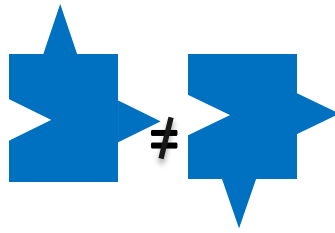
3.2. Définition de « pièces différentes »

Comme nous l'avons dit dans la présentation du problème, les pièces de notre puzzle doivent être toutes différentes. Nous nous sommes donc demandé quand considérer que deux pièces sont différentes.

- Premier cas : On considère les deux pièces ci-dessous comme **une seule pièce** car quand on tourne la première on obtient la seconde. On peut tourner de 90° , 180° et 270° .



- Deuxième cas : On considère les deux pièces ci-dessous comme **deux pièces différentes** car quand on tourne la première de 90° , 180° ou 270° il n'est pas possible d'obtenir la seconde. Il faut **retourner** la première pour obtenir la seconde. Elles sont différentes.



Donc nous dénombrerons moins de 81 pièces car certains chemins de l'arbre donnent la même pièce.

3.3. Organisation du dénombrement

Maintenant que nous avons décrit les règles, nous allons dénombrer les pièces dont nous disposerons pour faire un puzzle.

Lors de notre recherche, nous avons tout de suite pensé à dessiner les pièces, mais comment s'organiser ?

Faire un tableau est le plus simple mais nous n'étions pas tous d'accord sur les caractéristiques à prendre en compte. Après plusieurs échanges et plusieurs séances nous nous sommes mis d'accord sur une présentation dans un tableau.

Alors nous avons trié nos pièces selon deux critères :

- nombre de côtés à motif non-plat.
- le type de motif non-plat

Dans le tableau qui suit (figure 2) :

Dans les colonnes, les pièces sont triées selon leur nombre de faces non-plates.

Dans les lignes, elles sont triées selon qu'elles n'ont que des motifs convexes, que des motifs concaves ou les deux.

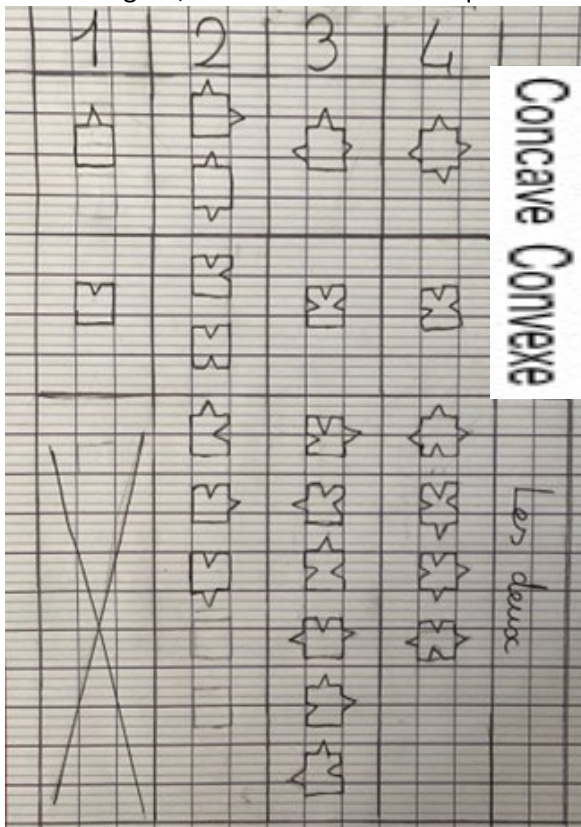


Figure 2 : dénombrement des pièces

3.4. Conclusion

Le nombre de pièces différentes que l'on peut créer avec nos trois motifs (concave, convexe et plat) est donc égal à 24 pièces : les 23 pièces dessinées dans le tableau et la pièce avec 4 bords plats.

4. Le plus grand puzzle possible

4.1. Quelques précisions

Nous disposons maintenant de 24 pièces et nous cherchons le plus grand puzzle possible.

Voici les questions que nous nous sommes posées pour construire ce puzzle :

- Quelle est la forme du puzzle ?
Le puzzle est un rectangle (il peut aussi être un carré car les carrés sont des rectangles particuliers). Les pièces dans les angles ont donc 2 à 3 bords plats qui se suivent.
- Peut-on connecter deux faces plates à l'intérieur du puzzle ?
La réponse est non car on ne connecte pas deux faces plates à l'intérieur d'un puzzle classique.

4.2. Dimensions du plus grand puzzle possible

Le plus grand puzzle réalisable doit utiliser moins de 24 pièces car il est impossible d'utiliser 6 pièces (les pièces barrées en rouge figure 3). En effet, les pièces avec deux cotés plats parallèles ne sont utilisables que pour des puzzles en bande (qui n'ont qu'une pièce de large) et ces puzzles ne pourront pas permettre de construire le plus grand puzzle possible.

Mais ce qui va nous intéresser c'est le puzzle avec les autres pièces il y a donc plusieurs possibilités le 3×6 , 4×4 , 3×5 , 2×7 , 2×6 , 2×5 , 3×3 , 2×4 , 2×3 et 2×2 .

Le problème est qu'il n'y a plus que 18 pièces utilisables (voir figure 3) :

- 4 pièces de type A (barrées en violet),
- 8 pièces de type B (barrées en jaune)
- et 6 pièces de type C (barrées en vert).

Il est donc impossible de faire le 3×6 car il y a besoin de 10 pièces de type B pour construire le bord. Parmi les possibilités énumérées ci-dessus le 4×4 est le plus grand.

Nous allons essayer de le faire.

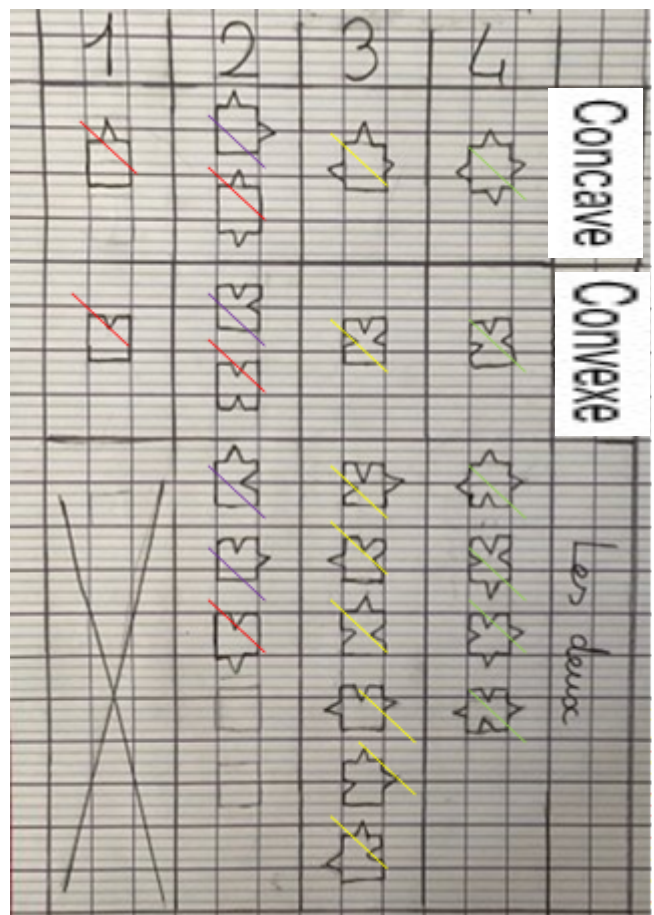


Figure 3: Les pièces selon leur place dans le puzzle

4.3. Le plus grand puzzle possible

Nous avons trouvé que le plus grand puzzle possible est un 4*4 : nous avons réussi à construire ce puzzle (ci-contre : solution 1) et nous avons vu avant qu'il n'était pas possible d'en construire un plus grand avec nos pièces.

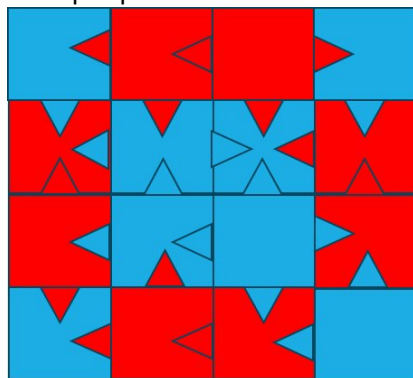
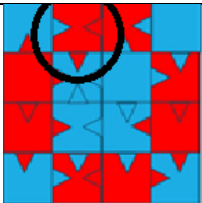
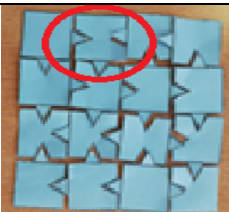
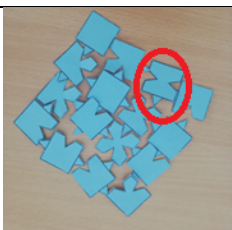
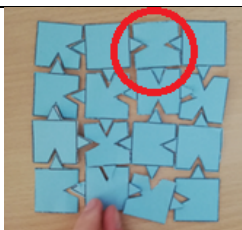


Figure 4 : le plus grand puzzle

4.4. D'autres solutions

Dans le tableau ci-dessous nous donnons d'autres solutions :

			
Solution 1	Solution 2	Solution 3	Solution 4
			
Solution 5	Solution 6	Solution 7	Solution 8

Les puzzles sont tous différents car quand on se concentre sur la même pièce dans chaque puzzle la pièce est entourée d'autres pièces différentes à chaque fois.

Pour chaque nouvelle solution on doit vérifier qu'elle ne correspond à aucune des autres solutions existantes. Ainsi, si nous avons 4 solutions différentes. La nouvelle solution envisagée (solution 5) doit être comparée avec ces 4 solutions.

Pour vérifier que nos 8 solutions sont différentes nous devons faire 28 vérifications (1+2+3+4+5+6+7).

4.5. Nombre solutions possibles

En tournant le puzzle on peut toujours amener la pièce entourée en rouge en haut.

Dans chaque puzzle la pièce entourée en rouge peut avoir deux positions.

Position 1 : elle a pour voisine une pièce d'angle (Type A) seulement 2 pièces conviennent et une pièce de bord (Type B) seulement 4 pièces conviennent.

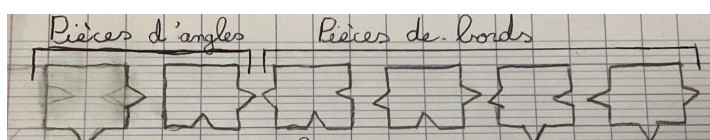
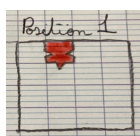


Figure 5 : dénombrement position 1

Position 2 : elle a pour voisine une pièce d'angle (Type A) seulement 2 pièces conviennent et une pièce de bord (Type B) seulement 4 pièces conviennent.

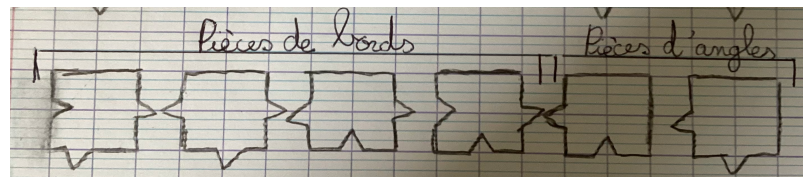
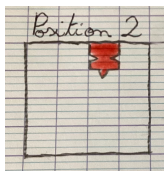


Figure 6 : dénombrement position 2

Il y a donc 16 possibilités ($2 \times 4 + 2 \times 4$).

4.6. Conclusion

Nous avons vu que le plus grand puzzle que nous pouvons construire est un puzzle 4×4 nous avons proposé 8 solutions et nous avons expliqué que nous ne pouvons pas dépasser 16 solutions.

5. Un nouveau problème

Après avoir fini le monochrome bleu "version simple", notre chercheur nous a proposé un prolongement du problème : au lieu d'avoir 3 motifs pour les côtés, nous en avons à présent 5 (plat, convexe triangulaire, concave triangulaire, convexe carré, concave carré).

Plat	Convexe triangulaire	Concave triangulaire	Convexe carré	Concave carré

5.1. Nombre maximal de pièces

Nous avons donc procédé de la même manière que pour 3.1 et imaginé un arbre.

Nous avons calculé le nombre maximal de pièces.

Mais, vu que nous avons 5 possibilités de bords au lieu de 3, on a 5^4 , au lieu de 3^4 . On sait donc que le nombre maximal de pièces est 625.

5.2. Organisation du dénombrement

Pour dénombrer les pièces nous pouvons procéder ainsi :

- 1 pièce à 4 bords plats
- 23 pièces avec des motifs triangulaires (voir figure 2)
- 23 pièces avec des motifs carrés (même tableau que celui de la figure 2 avec des carrés à la place des triangles)
- Des pièces mixtes.

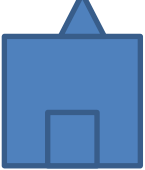
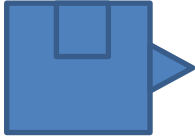
Définissons ce qu'est une pièce mixte :

Les pièces mixtes sont les pièces qui ont deux types de cotés les triangles et les carrés ces pièces ne peuvent qu'avoir les deux en même temps donc au maximum deux faces plates.

Il faut maintenant dénombrer les pièces mixtes. Nous pouvons nous aider du tableau de la figure 2 et remplacer une, deux ou trois faces plates par des motifs carrés. Nous ne sommes malheureusement pas allés au bout de la démarche et n'avons dénombré que les pièces mixtes à deux bords plats. Il resterait à dénombrer celles à aucun bord plat et un bord plat (à noter qu'une pièce à 3 bords plats ne peut pas être mixte).

Dans le tableau ci-dessous nous dénombrons les pièces mixtes à deux bords plats.

A partir des pièces à un motif triangle (colonne 1) de la figure 2 nous obtenons 12 pièces mixtes à deux bords plats différentes.

5.3. Conclusion

Nous avons une méthode pour dénombrer les pièces. Nous n’avons pas fait le dénombrement des pièces mixtes mais avons commencé à comprendre comment nous pouvons le faire.
Dès lors nous pouvons affirmer que le nombre de pièces différentes est supérieur à 69 pièces (1 + 23 + 23 + 12).
Nous avons démontré qu’il est inférieur à 625 pièces.

6. Conclusion finale

Notre problème consistait à trouver le nombre de pièces carrées différentes en utilisant trois motifs pour les côtés. Nous avons trouvé une méthode pour dénombrer les pièces, nous avons montré qu'il existe 24 pièces différentes.

Nous avons montré que le plus grand puzzle possible que l'on peut construire avec ces 24 pièces est un puzzle 4×4 . Nous n'utilisons que 16 pièces ; nous avons ensuite construits 8 puzzles différents et montré qu'il n'en existait pas plus de 16.

Le chercheur nous a alors proposé de travailler avec 5 motifs différents et nous avons commencé le dénombrement des pièces mais nous ne l'avons pas terminé. Nous avons expliqué qu'il y a entre 69 et 625 pièces.

Nous vous posons maintenant quelques questions auxquelles nous n'avons pas de réponse :

Pièces du puzzle carrées : étant donné un nombre de motifs à utiliser sur les côtés du carré existe-t-il une formule permettant de calculer le nombre de pièces ?

Autres formes de pièces : les pièces avec lesquelles nous avons travaillé étaient carrées et nous souhaitons construire un puzzle rectangulaire.

Peut-on à partir de pièces à base de triangles équilatéraux toutes différentes construire un puzzle en forme de triangle équilatéral ?

Plus généralement à partir de pièces à base de polygones réguliers tous différents construire un puzzle en forme de ce polygone régulier ?

À vous de le découvrir !