Mélanges de cartes

Année 2022 – 2023

Jasmine Bisotto, Stella Robache, élèves de classe de terminale

Établissement : Lycée Raynouard, Brignoles

Enseignant·e(s) : Denis Guicheteau, Nelly Mourau, Marc Brunet

Chercheur·Chercheuse(s) : Frédéric Havet, INRIA, Thierry Champion, Université de Toulon.

1. Présentation du sujet

Dans un paquet de cartes rangé, si on mélange les cartes combien en moyenne reviennent à la même place qu'initialement ?

2. Résultats

Nous avons trouvé qu'en moyenne une carte est à la même place qu'initialement.

3. Nos recherches

3.1. Le départ pour 2 cartes

Dans un premier temps nous utilisons une suite de chiffres au lieu d'un paquet de cartes classique. Nous avons commencé avec un paquet de deux cartes mélangées au départ dans cet ordre (1/2), une fois mélangées nous pouvons observer 2 mélanges possibles :

- 1/2 avec 2 cartes à la bonne place
- 2/1 avec 0 cartes à la bonne place

De ce fait, on déduit une moyenne :

$$\frac{le\ nombre\ de\ cartes\ \text{à}\ la\ bonne\ place}{le\ nombre\ de\ mélanges\ possibles}$$

Ainsi $\frac{2}{2} = 1$.

On trouve en moyenne 1 carte à la bonne place.

3.2. Pour 3 cartes

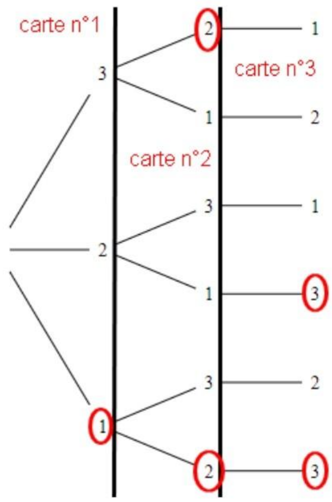
Nous cherchons à savoir si l'on trouve la même chose pour un paquet de 3 cartes ainsi :
Les mélanges possibles pour un paquet de 3 cartes rangées initialement (1 2 3) :

- 123 → 3 cartes à la bonne place
- 132 → 1 carte à la bonne place
- 213 → 1 carte à la bonne place
- 231 → 0 carte à la bonne place
- 312 → 0 carte à la bonne place
- 321 → 1 carte à la bonne place

En tout, on compte 6 mélanges possibles comportant 6 cartes à la bonne place dans l'ensemble de ces mélanges.
Par déduction si l'on refait notre moyenne on retrouve une moyenne de 1 carte à la bonne place :

$$\frac{6}{6} = 1$$

Par contre, schématiser de cette façon est long du fait du nombre de mélanges qui se multiplie à chaque carte à ajouter, on a alors fait sous forme d'arbre.



Mais finalement cela est d'autant plus difficile de schématiser de cette façon.
Puis nous avons utilisé un programme Python :

```
from math import *
# on demande le nombre de cartes
n=int(input("n?"))

#on remplit une liste de -1 signifiant les places libres dans le jeu
l=[-1]*n

c=0 #variable qui compte le nombre de mélanges
b=0 #variable qui compte le nombre de cartes à la même place

#fonction qui place la carte i (les cartes sont numérotées de 1 à n)
def place(i):
  #les variables sont globales
  global n, l, c, b
```

```
  #si j'ai fini un mélange (je place la nieme carte)
  if i==n:
    c=c+1 #j'augmente le nombre de mélanges possibles de 1
    #je regarde le nombre de cartes bien placées
    for k in range(n):
      #si une carte est bien placée (carte 1 à la place 0 ou carte 2 à la place 1 …)
      if l[k]==k+1:
        b=b+1 #j'augmente le nombre de cartes bien placées de 1
      #si je tombe dans l'espace libre (c'est la dernière carte que l'on doit placer)
      elif l[k]==-1:
        if k+1==i: #si l'espace libre est la dernière carte
          b=b+1 #j'ajoute 1 au nombre de cartes bien placées
  #Si je ne suis pas en train de placer la dernière carte
  else:
    #je vais placer la carte i à une place libre
    for j in range(n):
      #donc si j'ai une place libre
      if l[j]==-1:
        l[j]=i #je mets i dedans
        place(i+1) #je place la suivante
        #lorsque j'ai fait toutes les combinaisons avec la carte i à cette place
        #je la libère
        l[j]=-1

#je place la 1ere carte
place(1)

print("il y a ",c," combinaisons possibles pour ",n," cartes")
print("il y a exactement",b," cartes à la bonne place en tout")
```

Nous nous sommes cependant très vite aperçus qu'il était très difficile de démontrer nos observations pour un paquet contenant un nombre important de cartes, c'est pour cela que nous avons tenté d'établir des formules qui pourraient valider ce que nous avons observé pour un nombre restreint de cartes.

3.3. Pour n cartes

Nous cherchons à prouver que

Le nombre de cartes à la bonne place divisé par le nombre de mélanges possibles est égal à 1, peu importe le nombre de cartes.

3.3.1 Le nombre de mélanges possibles

Nous avons dans cette optique-là, établi une formule pour déterminer le nombre de mélanges possibles.
Pour cela nous avons utilisé le raisonnement suivant, pour n cartes nous avons donc n emplacements, ainsi la première carte posée possède n possibilités, la seconde carte aura ensuite $n-1$ emplacements et celle qui suit $n-2$, … jusqu'à la dernière carte à poser qui elle aura une seule possibilité correspondant à l'emplacement restant.

D'après ce raisonnement nous obtenons la formule :

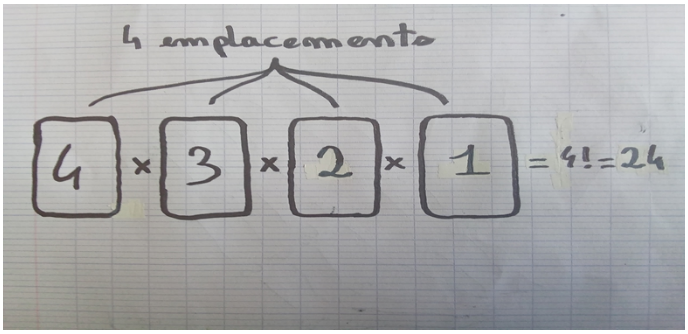
$$n \times (n-1) \times (n-2) \ldots 2 \times 1$$

Afin de faciliter la rédaction, il existe une notation mathématique permettant de gagner du temps : factorielle de n, notée $n!$

Exemple : pour un paquet de 4 cartes nous avons donc

$$4! = 4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$

soit 24 mélanges possibles pour 4 cartes.



3.3.2. Le nombre de mélanges avec désordre total

Ensuite nous avons cherché le nombre de mélanges existants avec aucune carte à sa place initiale. Que nous avons noté U_n.
Nous avons donc déterminé à la main que

$$U_2 = 1$$
$$U_3 = 2$$
$$U_4 = 9.$$

Puis, à l'aide d'un programme Python qui affiche tous les mélanges possibles et compte le nombre de mélanges avec aucune carte à la bonne place, que

$$U_5 = 44$$
$$U_6 = 265.$$

Cependant nous avons rapidement été contraints par le nombre de possibilités ce qui nous a amené à établir une formule nous permettant de calculer ceci en suivant le raisonnement suivant.

1 2 3 4. ←voici un paquet de 4 cartes ou toutes les cartes sont à leur place d'origine.

_1_ _ ←en partant de gauche à droite, commençons par décaler le 1 pour qu'il soit dérangé, ainsi le 1 prend la place du 2 qui va pouvoir prendre les autres emplacements :
2 1_ _ ou _ 1 2 _ ou _ 1 _ 2

À présent il ne nous reste plus qu'à ajouter le 3 et le 4.

2 1 4 3
4 1 2 3
3 1 4 2

La même chose pour _ _ 1 _ le 1 prend ainsi la place du 3 :

3 4 1 2
4 3 1 2
2 4 1 3

Et pour _ _ _1 où le 1 prend la place du 4 :

4 3 2 1
3 4 2 1
2 3 4 1

Nous retrouvons bien $U_4 = 9$.

En suivant ce raisonnement nous avons établi une première formule :

$$U_n = (n-1)(U_{n-2} + (n-2)(U_{n-3} + \ldots))$$

avec n le nombre de cartes supérieur à 2 (1).

Exemple pour U_5.

$$U_5 = 4(U_3 + 3(U_2 + 2(U_1))) = 4(2 + 3(1 + 2(1))) = 4(2 + 3 \times 3) = 44$$

Que nous pouvons simplifier en

$$U_n = \sum_{k=2}^{n-1} U_{n-k} \times \prod_{i=1}^{k-1} (n-i)$$

en posant (2)

$$U_0 = 0$$
$$U_1 = 1$$
$$U_2 = 1.$$

Avec cette formule nous obtenons alors

$$U_7 = 1854$$
$$U_8 = 14833$$
$$\dots$$

On cherche à présent à déterminer le nombre de mélanges existants pour k cartes bien placées. Pour ce faire, on note $C(n,k)$ tel que

$$C(n,k) = \binom{n}{k} U_{n-k}$$

avec n le nombre de cartes et k le nombre de cartes bien placées.

$C(n,k)$ n'est autre que la multiplication de k cartes bien placées parmi n cartes par le nombre de mélanges où $n-k$ cartes ne sont pas à leur place initiale (3).

Par le biais de cette formule nous avons établi une formule pour calculer le nombre de cartes bien placées au total. Celle-ci s'écrit

$$\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k)\,.$$

3.3.3. Quelques corrections

Certaines valeurs de U_n (pour $n = 0$ et 1) n'étaient pas cohérentes avec la réalité. En effet, pour un paquet de 1 carte, il n'y a pas de mélange avec un désordre total. Nous avons dû remodeler la formule de (U_n) afin qu'elle soit correcte. Nous avons du coup trouvé par tâtonnement une formule plus simple pour exprimer cette suite.

Ainsi (4)

$$U_{n+1} = n\left(U_n + U_{n-1}\right) \text{ pour } n \text{ plus grand que } 1$$

avec

$$U_0 = 1$$
$$U_1 = 0.$$

3.3.4. Exemple pour 4 cartes

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{4} k \times C(n,k) &= 1 \times C(4,1) + 2 \times C(4,2) + 3 \times C(4,3) + 4 \times C(4,4) \\ &= 1 \times \binom{4}{1} U_3 + 2 \times \binom{4}{2} U_2 + 3 \times \binom{4}{3} U_1 + 4 \times \binom{4}{4} U_0 \\ &= 1 \times 4 \times 2 + 2 \times 6 \times 1 + 3 \times 4 \times 0 + 4 \times 1 \times 1 \\ &= 24.\end{aligned}$$

Or $4! = 24$ donc notre conjecture est bel et bien vérifiée puisque la moyenne est bien de 1 (5).

4. Conclusion

Nous avons donc conjecturé que lors d'un mélange aléatoire de cartes, il y a en moyenne une carte qui reste à la bonne place. Ce qui peut permettre de classer les différents mélanges de cartes que nous connaissons (la coupe, le mélange américain, ...).

Lors de notre échange avec Thierry Champion, nous avons démontré cette conjecture en montrant que $\sum_{k=1}^{n} k \times C(n,k)$ correspond à la même chose que $\sum_{k=0}^{n} C(n,k)$ en faisant un changement d'indice (6). Or la deuxième expression correspond par définition à l'ensemble de tous les mélanges possibles car $C(n,k)$ est le nombre de mélanges avec k cartes exactement bien placées et donc si on fait varier k entre 0 et n, on parcourt toutes les possibilités.

Notes d'édition

(1) Un peu plus d'explication sur le raisonnement peut paraître utile. On a $n-1$ façons de placer la carte 1 ; pour chacune de ses places possibles i, soit la carte i est mise à la place de la 1 et il y a U_{n-2} possibilités de placer les $n-2$ cartes restantes sans qu'aucune soit à sa place ; soit elle est mise à la place d'une troisième carte j, distincte de 1 (et de i) parmi les $n-2$ restantes, et on peut à nouveau séparer les cas selon que j va à la place de 1 ou à la place d'une quatrième carte distincte des précédentes...
Avec $n = 4$, on s'arrête ici car la quatrième carte prendra nécessairement la dernière place libre, qui ne doit pas être la sienne : j doit prendre sa place et elle la place de 1, donc on n'a qu'une possibilité et $U_4 = 3(U_2 + 2 \times 1)$. Dans le cas général on s'arrêtera de même avec 2×1 ajoutés au terme U_2.

(2) Pour le choix de poser $U_1 = 1$, voir le paragraphe "Quelques corrections" : il vaudrait mieux poser

$U_0 = 1,\ U_1 = 0$, le terme final 2×1 correspondant à $2(U_1 + 1 \times U_0)$.

(3) Une meilleure formulation : $C(n,k)$ n'est autre que le produit du nombre de façons de choisir k cartes bien placées parmi n cartes par le nombre de mélanges de $n-k$ cartes où aucune n'est à place initiale.

(4) D'après la formule trouvée au 3.3.2,

$$\begin{aligned} U_{n+1} &= n\left(U_{n-1} + (n-1)\left(\left(U_{n-2} + (n-2)(U_{n-3} + \ \ldots)\right)\right)\right. \\ U_{n+1} &= n\left(U_{n-1} + U_n\right). \end{aligned}$$

Voir aussi l'article "Des couples" du lycée Douanier Rousseau de Laval pour une démonstration directe de cette formule et une expression de U_n.

(5) Il est montré ici que la conjecture est bien vérifiée seulement pour $n = 4$!

(6) On peut regretter que cette démonstration ne soit pas présentée. Le lecteur intéressé pourra d'abord établir la relation de récurrence $U_n = n\,U_{n-1} + (-1)^n$ pour $n \geq 2$ à partir de celle du 3.3.3 (voir l'article cité ci-dessus) puis utiliser les relations entre les coefficients du binôme.

Une autre piste pour montrer le résultat principal : compter, parmi toutes les permutations de n cartes, celles où une carte donnée est à sa place, et additionner ces nombres pour les différentes cartes.