La place de théâtre

Année 2022-2023

Juliette BOUTIN-CADANE, Apolline GERLAND (Terminale générale).

Établissement : Lycée Paul Guérin, Niort (79).

Encadrées par : Fabien AOUSTIN et Thomas FORGET.

Chercheur : Abdallah EL HAMIDI, Laboratoire des Sciences de l'Ingénieur pour l'Environnement, Université de La Rochelle.

Dans cet article, on calcule le nombre moyen de fois où on doit se relever pour céder sa place dans une salle de spectacle où on s'assoit au hasard.
On effectue quelques simulations puis on calcule cette espérance en fonction du nombre de places que contient la salle.

1) Présentation du problème

Vous avez réservé une place pour un spectacle dans une salle de 2000 personnes. Hélas, vous avez oublié le numéro de votre place ! Vous entrez le premier, vous vous asseyez au hasard, puis vous attendez qu'un autre spectateur vous déloge. Vous vous asseyez alors sur un autre siège laissé vide et procédez ainsi de suite jusqu'à trouver votre place.
En moyenne, combien de fois allez-vous vous relever ?

2) Quelques simulations

2-a) Des simulations « à la main »

Pour bien comprendre la situation nous avons simplifié le problème en considérant de très petites salles de spectacles.

- ***Pour une salle de deux places***

Pour une salle de deux places, on a une chance sur deux de s'asseoir directement à la bonne place et une chance sur deux de s'asseoir sur l'autre place et donc de se relever une fois.
Finalement, on se relève en moyenne $0{,}5$ fois.

- ***Pour une salle de trois places***

Nous avons découpé trois papiers numérotés de 1 à 3 que nous avons distribué au hasard à trois personnes puis nous avons simulé le « jeu ».

Voici un exemple :

- Alice a la place n° 3 ;
- Basile a la place n° 1 ;
- Camille a la place n° 2.

Alice est celle qui a perdu son numéro de place et entre la première. La personne qui joue ce rôle ne regarde donc pas le numéro qu'elle a pioché.

- Elle décide de s'asseoir (au hasard) à la place n° 1.
- Basile entre dans la salle et demande donc à Alice de se relever.
- Alice choisit alors (au hasard) la place n° 3.
- Camille entre dans la salle et peut s'asseoir.

Au bout du compte, Alice s'est relevée une fois.

En réalisant 12 fois cette expérience, nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombre de fois où on se relève	0	1	2
Effectif	3	5	4
Fréquence	0,25	0,42	0,33

En moyenne, il a fallu se relever environ 1,08 fois.

- ***Pour une salle de quatre places***

Cette fois-ci, nous avons découpé quatre papiers numérotés de 1 à 3.

Voici un exemple :

- Alice a la place n° 2 ;
- Basile a la place n° 1 ;
- Camille la place n° 4 ;
- Denise a la place n° 3.

Alice est celle qui a perdu son numéro de place et entre la première.

- Elle décide de s'asseoir (au hasard) à la place n° 4.
- Basile entre dans la salle et s'assoit à la place n° 1.
- Camille entre dans la salle et demande à Alice de se relever.
- Alice choisit alors (au hasard) la place n° 3.
- Denise entre dans la salle et demande à Alice de se relever.

Au bout du compte, Alice s'est relevée deux fois.

En réalisant 32 fois cette expérience, nous avons obtenu les résultats suivants :

Nombre de fois où on se relève	0	1	2	3
Effectif	5	16	9	2
Fréquence	0,16	0,50	0,28	0,06

En moyenne, il a fallu se relever 1,25 fois.

2-b) Des simulations informatiques

Notre but initial était de s'intéresser au cas d'une salle de 2000 places.
Une simulation « à la main » ne serait pas raisonnable. Nous avons donc écrit le programme Python suivant.

```python
import random
def places(n):
    L=[]
    o=0                         # initialisation du nombre de changements de siège
    for d in range(1,n+1):
        L.append(d)             # L = liste de toutes les places non occupées
    v=random.randint(1,n)       # v = notre vraie place
    k=random.randint(1,n)       # place choisie au début
    liste=L[:]
    del liste[v-1]              # on construit la liste des places des autres
    random.shuffle(liste)       # on mélange cette liste
    for p in liste:             # p va prendre les valeurs des places des autres
        if k==p and k!=v:       # si quelqu'un vient à notre place
            L.remove(p)         # on enlève de la liste L la place occupée
            k=random.choice(L)  # on choisit une nouvelle place inoccupée
            o+=1                # on a changé de place 1 fois de plus
        elif k!=p and k!=v:     # si quelqu'un s'assoit mais ne prend pas
                                # notre place
            L.remove(p)         # on enlève de la liste la place occupée
        elif k==v:              # si on est à la bonne place
            return(o)           # renvoie le nombre de fois où l'on a changé
                                # de place
    return(o)

def moyenne(d,n):               # renvoie la moyenne de d simulations pour n
                                # places
    v=0
    for p in range(0,d):
        v+=places(n)
    return(v/d)
print(moyenne(1000,2000))
```

On simule donc 1000 fois le « jeu » avec une salle de 2000 places.
En lançant plusieurs fois ce programme, on obtient toujours un résultat légèrement supérieur à 7.
Pour trouver notre place dans une salle de 2000 places, on ne se lèverait donc en moyenne qu'un peu plus de 7 fois.
Sans réussir à estimer le résultat, nous nous attendions quand même à beaucoup plus que cette valeur étonnante !

3) Le calcul de l'espérance

3-a) Le calcul pour des « très petites » salles

Notons maintenant X_n la variable aléatoire égale au nombre de fois où on se relève dans une salle de n places. Nous allons calculer $E(X_n)$ pour de petites valeurs de n.

- ***Pour une salle de deux places***

On a la loi de probabilité suivante :

k	0	1
$P(X_2 = k)$	0,5	0,5

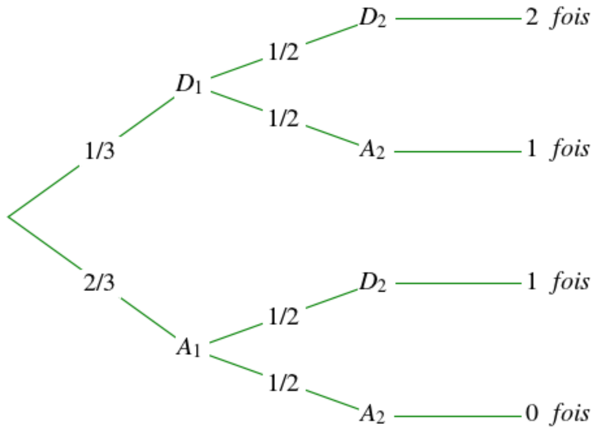
On a donc

$$E(X_2) = 0 \times 0{,}5 + 1 \times 0{,}5 = 0{,}5.$$

- ***Pour une salle de trois places***

On a l'arbre de probabilités ci-dessous où :

- A_n est l'événement : « on reste assis quand la n-ième personne arrive »
- D_n est l'événement : « on se relève quand la n-ième personne arrive».



On a donc la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2
$P(X_3 = k)$	$1/3$	$1/2$	$1/6$

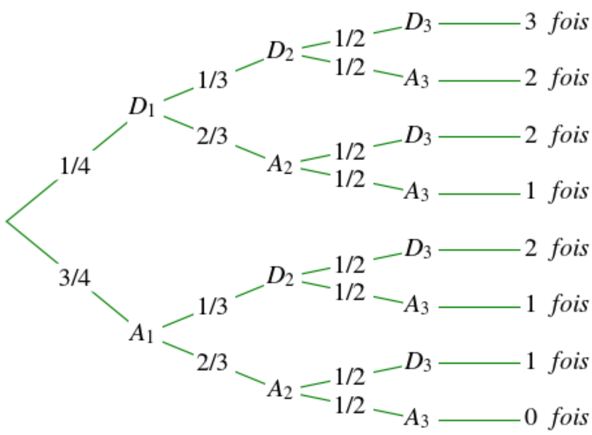
On a donc

$$E(X_3) = 0 \times \frac{1}{3} + 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{6} \approx 0{,}83.$$

Notre résultat expérimental était supérieur (environ 1,08) mais le nombre d'essais était très limité (12 répétitions seulement).

- ***Pour une salle de quatre places***

Cette fois-ci, on a l'arbre de probabilités ci-dessous.



On a donc la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3
$P(X_4 = k)$	$1/4$	$11/24$	$1/4$	$1/24$

On a donc

$$E(X_4) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{11}{24} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{24} \approx 1{,}083.$$

- ***Pour une salle de cinq places***

Pour une salle de cinq places, faire un arbre commence à être trop long.
Nous avons alors déduit la loi de probabilité de X_5 de celle de X_4 de la façon suivante.
Pour avoir $X_5 = 0$, il faut rester à sa place quand la première personne rentre, puis quand les trois suivantes entrent aussi. On a donc

$$P(X_5 = 0) = P(A_1) \times P(X_4 = 0) = \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{5}.$$

Pour avoir $X_5 = 1$ il y a deux possibilités :

- on se lève pour la première personne puis on reste assis pour les 3 suivantes ;
- on reste assis pour la première personne puis on ne se lève qu'une seule fois pour les 3 suivantes.

On a donc

$$P(X_5 = 1) = P(D_1) \times P(X_4 = 0) + P(A_1) \times P(X_4 = 1) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{11}{24} = \frac{5}{12}.$$

Le même raisonnement donne

$$P(X_5 = 2) = P(D_1) \times P(X_4 = 1) + P(A_1) \times P(X_4 = 2) = \frac{1}{5} \times \frac{11}{24} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{4} = \frac{7}{24} \text{ ;}$$
$$P(X_5 = 3) = P(D_1) \times P(X_4 = 2) + P(A_1) \times P(X_4 = 3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{4} + \frac{4}{5} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{12} \text{ ;}$$
$$P(X_5 = 4) = P(D_1) \times P(X_4 = 3) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{24} = \frac{1}{120}.$$

On a donc la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4
$P(X_5 = k)$	1/5	5/12	7/24	1/12	1/120

On a donc

$$E(X_5) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{5}{12} + 2 \times \frac{7}{24} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{1}{120} \approx 1{,}283.$$

- ***Pour une salle de six places***

Pour une salle de six places, nous avons procédé de la même façon.

$$P(X_6 = 0) = P(A_1) \times P(X_5 = 0) = \frac{5}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{6} \text{ ;}$$
$$P(X_6 = 1) = P(D_1) \times P(X_5 = 0) + P(A_1) \times P(X_5 = 1) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{5}{6} \times \frac{5}{12} = \frac{137}{360} \text{ ;}$$
$$P(X_6 = 2) = P(D_1) \times P(X_5 = 1) + P(A_1) \times P(X_5 = 2) = \frac{1}{6} \times \frac{5}{12} + \frac{5}{6} \times \frac{7}{24} = \frac{5}{16} \text{ ;}$$
$$P(X_6 = 3) = P(D_1) \times P(X_5 = 2) + P(A_1) \times P(X_5 = 3) = \frac{1}{6} \times \frac{7}{24} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{12} = \frac{17}{144} \text{ ;}$$
$$P(X_6 = 4) = P(D_1) \times P(X_5 = 3) + P(A_1) \times P(X_5 = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{12} + \frac{5}{6} \times \frac{1}{120} = \frac{1}{48} \text{ ;}$$
$$P(X_6 = 5) = P(D_1) \times P(X_5 = 4) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{120} = \frac{1}{720}.$$

On a donc la loi de probabilité suivante :

k	0	1	2	3	4	5
$P(X_6 = k)$	1/6	137/360	5/16	17/144	1/48	1/720

On a donc

$$E(X_6) = 0 \times \frac{1}{6} + 1 \times \frac{137}{360} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{17}{144} + 4 \times \frac{1}{48} + 5 \times \frac{1}{720} = \frac{29}{20} = 1{,}45.$$

- ***Bilan des premiers calculs***

Après avoir observé longtemps nos premières valeurs, nous avons remarqué que

$$E(X_3) - E(X_2) = \frac{5}{6} - \frac{1}{2} = \frac{1}{3} \;;$$
$$E(X_4) - E(X_3) = \frac{13}{12} - \frac{5}{6} = \frac{1}{4} \;;$$
$$E(X_5) - E(X_4) = \frac{77}{60} - \frac{13}{12} = \frac{1}{5} \;;$$
$$E(X_6) - E(X_5) = \frac{29}{20} - \frac{77}{60} = \frac{1}{6} \;.$$

Nous avons donc conjecturé que, pour tout entier $n \geq 2$, on a

$$E(X_{n+1}) - E(X_n) = \frac{1}{n+1} \;.$$

3-b) Un calcul général direct

En utilisant les mêmes astuces de calcul que précédemment, nous avons obtenu le résultat suivant.

$$\begin{aligned}
E(X_{n+1}) &= \sum_{k=0}^{n} k \times P(X_{n+1} = k) = 0 + \sum_{k=1}^{n-1} k \times P(X_{n+1} = k) + n \times P(X_{n+1} = n) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\big(P(D_1) \times P(X_n = k-1) + P(A_1) \times P(X_n = k)\big) + n \times P(D_1) \times P(X_n = n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{n+1} P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \times P(X_n = k)\right) + n \times \frac{1}{n+1} \times P(X_n = n-1) \\
&= \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{1}{n+1} P(X_n = k-1)\right) + \sum_{k=1}^{n-1} k\left(\frac{n}{n+1} \times P(X_n = k)\right) + n \times \frac{1}{n+1} \times P(X_n = n-1) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} k\, P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} k\, P(X_n = k) + n \times \frac{1}{n+1} \times P(X_n = n-1) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=1}^{n} k\, P(X_n = k-1) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=1}^{n-1} k\, P(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} (k+1) P(X_n = k) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} \big(k\, P(X_n = k) + P(X_n = k)\big) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_n = k) \\
&= \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_n = k) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) + \frac{n}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_n = k) \\
&= \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right) \sum_{k=0}^{n-1} k\, P(X_n = k) + \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n-1} P(X_n = k) \\
&= 1 \times E(X_n) + \frac{1}{n+1} \times 1 = E(X_n) + \frac{1}{n+1} \;.
\end{aligned}$$

Notre conjecture était donc exacte.

Nous avons alors

$$E(X_2) = \frac{1}{2}$$

$$E(X_3) = E(X_2) + \frac{1}{3} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3}$$

$$E(X_4) = E(X_3) + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4}$$

$$E(X_5) = E(X_4) + \frac{1}{5} = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5}$$

et finalement

$$E(X_n) = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \ .$$

La calculatrice donne $E(X_{2000}) \approx 7{,}178$, ce qui est cohérent avec notre simulation informatique.

3-c) Une autre approche

La méthode utilisée pour exprimer les probabilités dans les calculs précédents peut en fait être utilisée directement pour exprimer l'espérance.
En effet, s'il y a $n+1$ places dans la salle, il y a deux situations possibles :

- *situation 1 :* on doit se relever quand la première personne rentre et on se relèvera donc en moyenne $1 + E(X_n)$ fois ;
- *situation 2 :* on reste assis quand la première personne rentre et on se relèvera donc en moyenne $E(X_n)$ fois.

La probabilité de se retrouver dans la première situation est égale à $P(D_1) = 1/(n+1)$;
la probabilité de se retrouver dans la deuxième situation est égale à à $P(A_1) = n/(n+1)$.

Finalement, on a donc

$$\begin{aligned} E(X_{n+1}) &= \frac{1}{n+1}(1 + E(X_n)) + \frac{n}{n+1}\ E(X_n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+1}E(X_n) + \frac{n}{n+1}\ E(X_n) \\ &= \frac{1}{n+1} + \left(\frac{1}{n+1} + \frac{n}{n+1}\right)E(X_n) \\ &= \frac{1}{n+1} + E(X_n). \end{aligned}$$

On retrouve bien la relation attendue.

4) Et quand *n* tend vers +∞ ?

Nous avons vu que l'espérance de X_n était liée à la série harmonique, c'est-à-dire la suite (H_n) définie pour tout entier naturel n non nul par $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.
En fait, on a $E(X_n) = H_n - 1$ pour tout entier naturel $n \geq 2$.

Comme la valeur obtenue pour © est très faible, nous nous sommes demandé quelle était la limite de la suite $(E(X_n))$.

Soit 2^m la plus grande puissance de 2 inférieure ou égale à l'entier n. On a $E(X_n) \geq E(X_{2^m})$.
Nous nous sommes inspirées de la démonstration de Nicolas Oresme (vers 1360). On a

$$E(X_{2^m}) = \underbrace{\frac{1}{2^1}}_{=\frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2}}_{\substack{\geq \frac{1}{4}+\frac{1}{4} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{2^3}}_{\substack{\geq \frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{10} + \frac{1}{11} + \frac{1}{12} + \frac{1}{13} + \frac{1}{14} + \frac{1}{15} + \frac{1}{2^4}}_{\substack{\geq \frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16} \\ \geq \frac{1}{2}}} + \underbrace{\cdots + \frac{1}{2^{m-1}}}_{\geq \frac{1}{2}} + \underbrace{\cdots + \frac{1}{2^m}}_{\geq \frac{1}{2}}$$

donc

$$E(X_{2^m}) \geq m \times \frac{1}{2} \ .$$

Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} m \times \frac{1}{2} = +\infty$, on a

$$\lim_{n \to +\infty} E(X_n) = +\infty.$$

Finalement, ce résultat est conforme à la première intuition qu'on pouvait avoir du problème (si le nombre de places de la salle tend vers l'infini, le nombre moyen de fois où on va devoir se relever va aussi tendre vers l'infini) mais la croissance de la suite est vraiment très lente !

Pour une salle de 10 000 places, on trouve $E(X_{10000}) \approx 8{,}788$.
Pour un stade de 50 000 places, on trouve $E(X_{50000}) \approx 10{,}397$!!!