

Roulement à billes

Année 2024 – 2025

Marie Mirguet, Vadim Nom, Hugo Calbrix, Émilien Roche, Jonas Helmstetter, Alexis Colbeau-Justin, élèves de classes de 4ème et de 3ème.

Établissements : Collèges Alexander Fleming et Alain Fournier (Orsay)

Encadré-es par : Delphine Fillion et Florence Ferry

Chercheur-Chercheuse(s) : Emmanuel Kammerer (École Polytechnique Paris-Saclay) et Lucrezia Bertolotti.

1. Introduction

Un roulement à billes est représenté en coupe par n cercles C de même rayon, tangents entre eux deux à deux et tangents à deux cercles de centre O et de rayon R et r . Y a-t-il une relation entre n , R et r ?

2. Vocabulaire et notation

Définitions :

- deux cercles sont tangents s'ils ont un unique point commun.
- Un cercle est tangent à une droite si le cercle et la droite ont un unique point commun.

Sur la figure ci-contre, c est tangent à D et D est tangent à (d) en B .

Propriété : Soit D un cercle de centre A et tangent à une droite (d) en B . On a alors : $(d) \perp (AB)$.

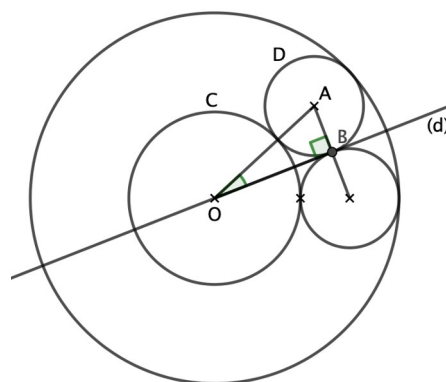


Figure 1

Pour la suite de l'article, nous utiliserons les notations suivantes :

- C le grand cercle de centre O et R , son rayon.
- c le petit cercle de centre O et r , son rayon.
- C' le cercle intermédiaire de centre O , passant par tous les centres des n cercles tangents, compris entre C et c .
- a , le rayon des n cercles tangents.

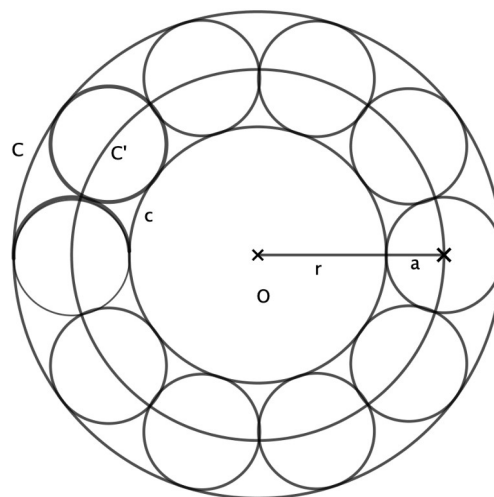


Figure 2

3 - Etude d'un cas particulier : $n = 4$

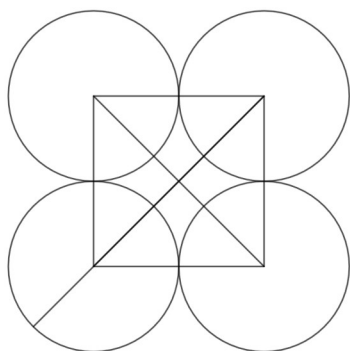


Figure 3

Sur la figure ci-dessus, nous avons tracé les 4 cercles tangents entre eux. Nous avons ensuite tracé un carré, dont les sommets sont les centres des billes. Nous avons également tracé les diagonales du carré. Et enfin, nous avons prolongé une diagonale jusqu'à l'extrémité d'un cercle. Il manque sur ce schéma le petit et le grand cercle, car nous cherchons à en calculer les rayons. Le croisement entre les deux diagonales est le centre de la figure et donc le centre du petit et du grand cercle. La moitié d'une diagonale est le rayon du cercle intermédiaire, car ses extrémités sont le centre du cercle et le centre d'un des n cercles. Le segment joignant le point d'intersection des diagonales jusqu'à l'extrémité d'un petit cercle est le rayon du grand cercle C .

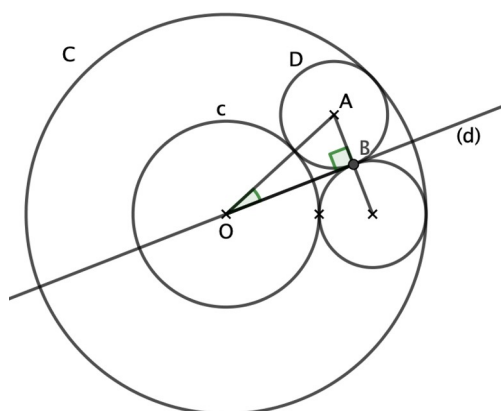
Sur le schéma ci-dessus, on connaît le rayon des 4 cercles. On peut donc appliquer le théorème Pythagore dans le grand triangle rectangle isocèle de longueur d'hypoténuse $2r + 2a$ et $2a$ de côté.

$$(2a)^2 + (2a)^2 = (2r + 2a)^2 \quad \text{d'où : } 4a^2 + 4a^2 = (2r + 2a)^2 \quad \text{d'où : } 8a^2 = (2r + 2a)^2$$

$$\text{Donc : } 2r + 2a = \sqrt{8a} \quad \text{et donc : } r = (\sqrt{8a} - 2a)/2$$

$$\text{Connaissant } r, \text{ on peut calculer } R : R = r + 2a = (\sqrt{8a} - 2a)/2 + 2a.$$

4. Recherche d'une formule liant n , R et r



On calcule d'abord le rayon d'une bille.

$$\text{On a : } R - r = 2a \quad \text{Donc : } \frac{R-r}{2} = a$$

Le triangle OAB est rectangle en B :

$$\sin(\widehat{AOB}) = \frac{AB}{OA}$$

$$\text{Il y a } n \text{ cercles donc : } \widehat{AOB} = \frac{360^\circ}{2n} = \frac{180^\circ}{n}$$

Donc $\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{AB}{OA}$ avec $AB = a$ et $OA = r + a$. Ainsi, en fonction du nombre n de cercles, on aura une condition sur R et r :

$$\sin \frac{180^\circ}{n} = \frac{a}{r+a} = \frac{\frac{R-r}{2}}{r + \frac{R-r}{2}} = \frac{\frac{R-r}{2}}{\frac{2r+R-r}{2}} = \frac{R-r}{R+r}$$

5. Applications

Pour $n = 3$: $\frac{R-r}{R+r} = \sin \frac{180^\circ}{3} = \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$

donc

$$R = \frac{-r(\sqrt{3}+2)}{\sqrt{3}-2} = \frac{-r(\sqrt{3}+2)(\sqrt{3}+2)}{(\sqrt{3}-2)(\sqrt{3}+2)} = r(7+4\sqrt{3})$$

Pour $n = 4$:

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin \frac{180^\circ}{4} = \sin(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} \text{ d'où } R = r(3+2\sqrt{2})$$

Pour $n = 6$:

$$\frac{R-r}{R+r} = \sin \frac{180^\circ}{6} = \sin(30^\circ) = \frac{1}{2} \text{ d'où } R = 3r$$

Une question pourrait également se poser en ouverture : étant donnée une valeur pour R et une pour r , combien de cercles peut on mettre au maximum sachant qu'ils ne se touchent pas forcément ?