

Les volcans de Tétraland

Année 2025-2026

Yasser ECHADLI, Marwan KILANI, Morgan TEMAM, Céliane FRANCISCO, élèves de
terminale et de première

Établissement : Lycée Jean Zay, Aulnay-Sous-Bois

Enseignante : Majuri MANOHARAN

Chercheurs : Flavien BREUVART, Axel FOUDA (étudiant Polytechnicien)

Table des matières

1 Introduction	2
1.1 Présentation du sujet	2
1.2 Résultats principaux	2
2 Question 1 : Prévion des éruptions	2
2.1 Énoncé du problème	2
2.2 Notre démarche	2
2.3 Résultats	3
3 Question 2 : Réparation des routes	3
3.1 Énoncé du problème	3
3.2 Notre démarche	3
3.3 Résultats	3
4 Conclusion	4
Notes d'édition	4

1. Introduction

1.1. Présentation du sujet

Tétraland est une planète en forme de tétraèdre régulier. Ses habitants se déplacent d'un endroit à un autre en suivant les routes à la surface de la planète.

Un jour, un volcan entre en éruption sur l'une des faces. Cette face se divise en six petits triangles qui forment une pyramide au centre. La planète passe de 4 faces à 9 faces. Chaque éruption ajoute 5 faces.

D'autres éruptions ont lieu par la suite, d'abord sur les quatre faces d'origine, puis sur de nouvelles faces. Les routes sont abîmées à chaque éruption.

Nous avons travaillé sur deux questions :

- Question 1 : Peut-on prévoir quand auront lieu les prochaines éruptions?
- Question 2 : À quelle vitesse les ouvriers doivent-ils réparer les routes après chaque éruption?

1.2. Résultats principaux

Nous avons découvert que les intervalles entre les éruptions forment une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Cela signifie que chaque intervalle est égal aux deux tiers du précédent, et que les éruptions se rapprochent de plus en plus dans le temps.

Pour la réparation des routes, nous avons établi une formule montrant que le temps disponible est divisé par deux à chaque éruption.

2. Question 1 : Prévion des éruptions

2.1. Énoncé du problème

Les éruptions se succèdent avec les intervalles suivants : une première éruption a lieu, puis une deuxième 81 ans plus tard, une troisième 54 ans après, une quatrième 36 ans après, une cinquième 24 ans après, et une sixième 16 ans après. Peut-on trouver un motif dans ces intervalles pour prévoir les éruptions futures?

2.2. Notre démarche

Nous avons observé les intervalles entre les éruptions : 81 ans, 54 ans, 36 ans, 24 ans, 16 ans. En cherchant un lien entre ces valeurs, nous avons remarqué que chaque intervalle s'obtient en multipliant le précédent par $\frac{2}{3}$:

- $81 \times \frac{2}{3} = 54$
- $54 \times \frac{2}{3} = 36$
- $36 \times \frac{2}{3} = 24$
- $24 \times \frac{2}{3} = 16$

Cette régularité nous a conduit à reconnaître une suite géométrique de premier terme 81 et de raison $\frac{2}{3}$.

2.3. Résultats

Les intervalles entre les éruptions forment une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$. Puisque cette raison est inférieure à 1, la taille des intervalles diminue et tend vers 0 : les éruptions se rapprochent sans cesse.

De plus, la somme de tous ces intervalles est finie(1). Cela signifie que toutes les éruptions auront eu lieu au bout d'un temps limité, et qu'après ce moment, il n'y aura plus d'éruptions.

3. Question 2 : Réparation des routes

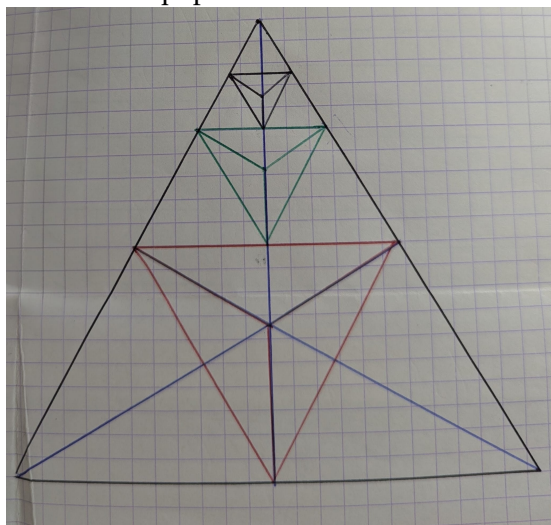
3.1. Énoncé du problème

Sur Tétraland, des routes traversent chaque face dans le sens de la hauteur du triangle. Quand une éruption se produit, la face se divise et les routes sont abîmées. Des équipes d'ouvriers doivent les réparer avant la prochaine éruption. Quelle vitesse de réparation doivent-ils atteindre?

3.2. Notre démarche

Pour simplifier le problème, nous avons posé plusieurs hypothèses :

- Les faces de Tétraland sont des triangles équilatéraux réguliers(2).
- Les routes correspondent aux hauteurs de chaque triangle.
- Les routes peuvent emprunter les arêtes de la planète(3).
- On ne tient compte que des volcans situés aux sommets (coins) des faces(4).
- Trois équipes d'ouvriers travaillent sur chaque face, une par route (hauteur)(5).



Nous avons noté $PRC(P_m)$ le temps de réparation nécessaire lors de l'éruption numéro m .

3.3. Résultats

Nous avons établi la formule suivante : $PRC(P_{m+1}) = \frac{1}{2} \times PRC(P_m)$ (6). À chaque nouvelle éruption, le temps disponible pour réparer les routes est divisé par deux(7). Les ouvriers doivent donc doubler leur vitesse à chaque éruption(8).

En lien avec la question 1, comme le temps entre deux éruptions tend vers 0, les réparations devront à terme se faire dans un délai très court.

4. Conclusion

Nous avons traité les deux premières questions. Pour la question 1, nous avons trouvé que les intervalles entre les éruptions forment une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$, ce qui permet de prévoir toutes les éruptions futures. Pour la question 2, nous avons montré que le temps disponible pour réparer les routes est divisé par deux à chaque éruption.

Ce projet nous a permis d'utiliser les suites géométriques pour résoudre un problème concret. Nous avons aussi vu que les mathématiques permettent de modéliser des situations variées de façon rigoureuse.

Notes d'édition

(1) Le résultat est exact, il manque la preuve.

(2) Triangles équilatéraux réguliers = triangles équilatéraux

(3) Cette hypothèse est surprenante, elle ne semble d'ailleurs pas utilisée après. Car elle impliquerait que toutes les routes n'ont pas la même longueur, ce qui compliquerait le calcul du temps de réparation.

(4) Hypothèse encore plus surprenante, car elle contredit la présentation du sujet : si un volcan est à un sommet, quelle est la modification de la planète déclenchée par l'éruption ? Plus vraisemblablement – au vu du dessin, en particulier – il faut comprendre : les volcans situés au centre des faces (point de concours des hauteurs).

(5) À chaque éruption, on embauche donc 15 nouvelles équipes : 5 nouvelles faces ayant chacune 3 hauteurs. (Les équipes sont supposées toutes identiques).

(6) Cette formule mériterait justification. Le raisonnement est peut-être le suivant (voir le dessin, en oubliant le triangle vert et le petit triangle noir, le triangle rouge est la base de la pyramide créée par l'éruption qui s'est produite au centre du grand triangle) : pour chacun des 6 petits triangles (équilatéraux, toujours), la hauteur est bien moitié de la hauteur du grand triangle initial, puisque les côtés sont moitié du côté du triangle initial. On suppose évidemment le temps de réparation proportionnel à la longueur de la route. Vu l'hypothèse 5, chaque équipe a à réparer une et une seule hauteur d'un de ces nouveaux triangles. Le temps nécessaire à la réparation est donc divisé par 2, ce que dit la formule.

(7) Il y a confusion entre le temps nécessaire pour réparer (lui est bien divisé par deux, c'est la formule établie) et le temps disponible ; celui-là, c'est le temps entre deux éruptions, et dans la partie 2 on a vu qu'il était multiplié par $\frac{2}{3}$.

(8) Non : les ouvriers ont un tiers de temps en moins, mais deux fois moins de travail à faire, donc ils peuvent ralentir (de 25 % si l'on écrit le calcul).