Une fourmi sur un tétraèdre régulier

Année 2022– 2023

Félix Pietruczanis , Paul Lasalle, élèves de classe Terminale

Établissement : Lycée Honoré d'Estienne d'Orves de Carquefou, jumelé avec le lycée Grand Air de La Baule

Enseignante : Sandrine Bulliard

Chercheur : Antoine Meddane, Université de Nantes.

1 Présentation du sujet

Une fourmi se déplace sur un tétraèdre régulier en partant d'un sommet de référence. La distance entre deux sommets vaut 1.
Combien de chemins de longueurs 7 terminent à la position initiale ?
Combien de chemins de longueurs 7 terminent à un sommet adjacent ?
Combien de chemins de longueurs 2022 terminent à la position initiale ?
Combien de chemins de longueur 2022 terminent à un sommet adjacent ?

2 Résultats

Le nombre de chemins de longueur n allant de A à A sur le tétraèdre peut être calculé par la suite (Un) = pour n pair $\sum_{k=0}^{\frac{(n-2)}{2}}(3^{2k+1}-3^{2k})+1$ et pour n impair $\sum_{k=1}^{\frac{(n-1)}{2}}(3^{2k}-3^{2k-1})$
On peut généraliser le résultat pour toute figure à deux ou trois dimensions en utilisant les matrices d'adjacences.

3 Texte de l'article :

En cherchant à la main, on se rend compte que pour que la fourmi arrive en A, elle doit venir de n'importe quel sommet autre que A, or il y a 3^n chemins totaux(1). On trouve alors rapidement la suite suivante pour le tétraèdre régulier : $U_{n+1} = 3^n - U_n$ et $U_1 = 0$.
On peut trouver la formule explicite de cette suite, démontrée par récurrence(2) :

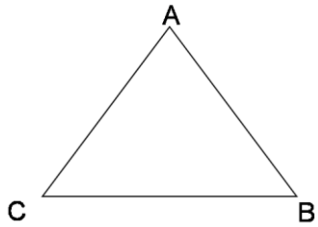
- Pour n pair : $\sum_{k=0}^{\frac{(n-2)}{2}}(3^{2k+1}-3^{2k})+1$
- Pour n impair : $\sum_{k=1}^{\frac{(n-1)}{2}}(3^{2k}-3^{2k-1})$

Il y a donc 546 chemins de longueur 7 partant de A et terminant en A et 1641 qui terminent en un

sommet adjacent, c'est-à-dire B, C, ou D(3).
On obtient de la même manière le nombre de chemins de longueur 2022 terminant en A ou à un sommet adjacent à A.

Ce type de problème se prête également à l'utilisation des graphes et des matrices d'adjacences. En effet, le tétraèdre peut être modélisé par un graphe, et le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et arrivant à un autre peut être calculé par sa matrice d'adjacence.
La matrice d'adjacence d'un graphe est la matrice carrée dont chaque terme à la ligne i et à la colonne j correspond au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j.
On peut ainsi étudier le déplacement de la fourmi sur différentes formes :

1 Pour un triangle équilatéral, la matrice d'adjacence est la suivante :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

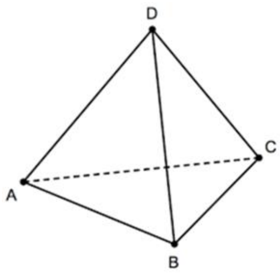
On peut trouver le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et terminant en un autre en mettant cette matrice à la puissance n (voir la démonstration dans le paragraphe 5).
Pour n = 7 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 42 & 43 & 43 \\ 43 & 42 & 43 \\ 43 & 43 & 42 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 42 chemins de longueur 7 partant en A et terminant en A et 43 + 43 = 86 chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c'est-à-dire B ou C.

Avec n = 2022, on trouve ce nombre :
160520305590386228266928974234411875210424774238047421138139294721308624440768812563008077003175583798133919442305455702017344828200791880960703653029840604069982356664046625752002983045526604388137944730043746870144169621877967100152562530529877396775194236894628927324650565244461426181632043913622351415564191010543050082627360894215924389634808778938285122603564489182487260265690387855719817642689630968997595726045279986449074502549080281974890319572057759916917113883847098597512429464493847506591074380182508120611538476091389847984987125627147343434609980063802150908337625258192182323304592835958102

2 Pour un tétraèdre régulier :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc trouver le nombre de chemins de longueur n partant d'un sommet et terminant en un

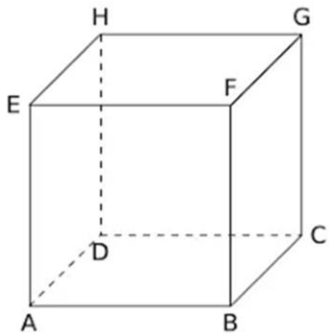
autre en mettant cette matrice à la puissance n.
Pour n = 7 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 546 & 547 & 547 & 547 \\ 547 & 546 & 547 & 547 \\ 547 & 547 & 546 & 547 \\ 547 & 547 & 547 & 546 \end{pmatrix}$$

Il y a donc 546 chemins de longueur 7 partant en A et terminant en A et 547+547+547 = 1641 chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c’est-à-dire B, C ou D.

Avec n = 2022, on trouve ce nombre :
137125129847914935245698659363583217875061146462723661004018039868659104359189439
177801945217601350276100086469424192427890066232396776077427112004406541604498375
323405094096624053667562194500781919601198957666083013967258112487517473480588686
519204589010104600984922084687605207303449840958216091479171253288504454361560931
286564799510900666908886373925086212451881349946495121482710507401462694604325043
393435529317560552612603784561240308559996829095322939355116975290545490562019653
273746878512622350076545295943689825935846798988122199491761223156232629592799466
381381662238145751706904161653623399226131857187555115037233262589286226438259380
196598337618482965166024148658980301524710868029466548831659658056733446337226076
668513751860009434006232507487092456546533112091574411923981403644050833202532332
604701065586355892147100176981696906366607852328717497980099465574882500831622868
95780723425976646516747156366091973597822247007436917355429928535149754903

3 Pour un cube :



$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

On peut donc trouver le nombre de chemins de longueur n partant d’un sommet et terminant en un autre en mettant cette matrice à la puissance n.
Pour n = 7 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}^7 = \begin{pmatrix} 0 & 547 & 0 & 547 & 547 & 0 & 546 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 546 \\ 0 & 547 & 0 & 547 & 546 & 0 & 547 & 0 \\ 547 & 0 & 547 & 0 & 0 & 546 & 0 & 547 \\ 547 & 0 & 546 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 547 & 0 & 546 & 547 & 0 & 547 & 0 \\ 546 & 0 & 547 & 0 & 0 & 547 & 0 & 547 \\ 0 & 546 & 0 & 547 & 547 & 0 & 547 & 0 \end{pmatrix}$$

Il n'y a donc aucun chemin de longueur 7 partant en A et terminant en A mais 547+547+547+546 = 2187 chemins partant de A et terminant en un somment adjacent à A, c’est-à-dire B, D, E ou G.

Avec n = 2022, on trouve ce nombre :
137125129847914935245698659363583217875061146462723661004018039868659104359189439
177801945217601350276100086469424192427890066232396776077427112004406541604498375
323405094096624053667562194500781919601198957666083013967258112487517473480588686
519204589010104600984922084687605207303449840958216091479171253288504454361560931
286564799510900666908886373925086212451881349946495121482710507401462694604325043
393435529317560552612603784561240308559996829095322939355116975290545490562019653
273746878512622350076545295943689825935846798988122199491761223156232629592799466
381381662238145751706904161653623399226131857187555115037233262589286226438259380
196598337618482965166024148658980301524710868029466548831659658056733446337226076
668513751860009434006232507487092456546533112091574411923981403644050833202532332
604701065586355892147100176981696906366607852328717497980099465574882500831622868
95780723425976646516747156366091973597822247007436917355429928535149754903

4 Conclusion

En utilisant dans un premier temps les suites et dans un deuxième temps les matrices d’adjacences, nous sommes parvenus à déterminer les réponses au problème et à le généraliser pour n’importe quelle longueur de chemin et pour n'importe quel graphe et en particulier n'importe quel polyèdre.

5 Démonstration

Soit n l'ordre de la matrice d'adjacence M (donc aussi de M^k) et du graphe associé.
M^k_{ij} est le coefficient de la i-ème ligne et j-ème colonne de M^k

On cherche à montrer par récurrence la propriété
$P(k)$: " M^k_{ij} est le nombre de chaînes de longueur k reliant i à j "

Initialisation :
$P(1)$: $M^1_{ij} = M_{ij}$ soit le nombre d'arêtes reliant i à j, et donc le nombre de chaînes de longueur 1 reliant i à j
$P(1)$ est vraie

Hérédité :
On suppose qu'il existe un entier $k > 1$ tel que $P(k)$ soit vraie.
Un chemin de longueur k+1 reliant i à j peut être décomposé en un chemin de longueur k reliant i à un sommet S et une arête reliant S à j
Ainsi, le nombre de chemins de longueur k+1 reliant i à j peut s'écrire $\sum_{S=1}^{n} M^k_{iS} \times M_{Sj}$

Or cette somme revient au produit de matrices suivant :

$$\begin{pmatrix} M^k_{i1} & M^k_{i2} & M^k_{i3} & \cdots & M^k_{in} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} M_{1j} \\ M_{2j} \\ M_{3j} \\ \vdots \\ M_{nj} \end{pmatrix} = M^{k+1}_{ij}$$

$P(k) \Rightarrow P(k+1)$

Conclusion
$P(1)$ est vraie et $P(k) \Rightarrow P(k+1)$ donc $P(k)$ est vraie $\forall k \in \mathbb{N}$.

(4)

Notes d'édition

(1) Les chemins de longueurs n partant de A sont des n-uplets choisis parmi trois sommets à chaque fois. Pour mieux comprendre, tracer un arbre pour n=2. Il part de A.

(2) La récurrence est ici un peu complexe. Il y a deux hypothèses à poser : le cas où n est pair et le cas où n est impair.

(3) Les chemins se terminant sur les sommets adjacents sont les chemins de longueur 7 auxquels on enlève ceux qui terminent en A : $3^7 - u_7$

(4) La notation des coefficients de la matrice M^k peut ici poser problème. Ces coefficients ne sont pas les coefficients de la matrice M mis à la puissance k.

Dans la conclusion, k appartient à **N*** et non **N**