aires, volumes : découpages

par Marc Breton, Eric Vasset, Ludovic Girardeau, Emmanuel Frontin, élèves de 2nde du Lycée Fragonard de l'Isle-Adam et Barbara Pouet, Marianne Lucas, élèves de 2nde du lycée Alfred Kastler de Cergy-Pontoise

enseignantes : Annick Boisseau, Claude Matz et Annie Soismier

chercheurs : Michèle Vergne et François Digne, de l'Ecole Normale Supérieure

Documentation utilisée :
La gazette des Mathématiciens n°52 avril 1992 “Aspects classiques du troisième problème de Hilbert”.
Commentaires des professeurs :
C'est un sujet qui a bien fonctionné tout au long de l'année. La présence des élèves a été très régulière. On ne leur a fourni qu'un seul document qu'ils ont su exploiter. Document qui était difficile, mais quand même abordable. Les élèves auraient aimé arriver à savoir pourquoi on ne pouvait pas transformer les autres solides (autres que ceux de Hill) en cube. Le passage du tétraèdre de Hill au pavé a posé des difficultés dans la lecture de la figure. Il a fallu au moins quatre tentatives pour aboutir au découpage permettant de passer du tétraèdre de Hill au prisme droit puis au pavé. Il est regrettable d'ailleurs que leur rédaction ne porte que sur le passage du tétraèdre de Hill au prisme. Nous pensons que ce groupe a acquis une vision dans l'espace qui sera certainement réutilisable.

PLAN :
Introduction.
1.— les aires dans le plan.
Passage de deux carrés à un seul carré. Passage de un triangle à un rectangle par découpage. Passage de un rectangle à un carré par découpage. Passage de un polygone quelconque à des triangles. Le Tangram.
2.— les volumes.
Tétraèdre de Hill, passage du tétraèdre au prisme. Passage du pavé au cube.
3.— conclusion.

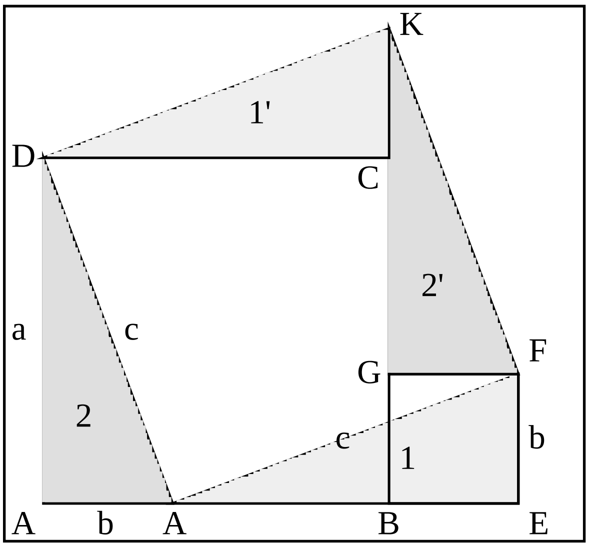
introduction

Notre objectif était de transformer une figure en une autre de même aire pour les figures planes, ou de même volume pour les solides, par découpages finis.

les aires dans le plan.

passage de deux carrés à un seul carré de même aire

On considère deux carrés ABCD et BEFG de côtés a et b (on suppose a < b). En découpant les carrés on veut obtenir un seul carré de côté c, ayant pour aire la somme des aires des deux carrés (on doit avoir $c^2 = a^2 + b^2$).



Soit H le point de [AB] tel que AH=b.

Montrons que : $\angle$ DHF = 90° [ou (DH) et (HF) perpendiculaires] et que DH = HF = c et $c^2 = a^2 + b^2$.

HE = a. En effet : AE = a + b, AH = b, H $\in$ [AE] donc HE = AE - AH = a.

HD = HF = c (triangles AHD et HEF rectangles). Ces triangles sont donc identiques.
D'où : $\angle$ AHD = $\angle$ EFH et $\angle$ ADH = $\angle$ EHF.
De plus $\angle$ ADH + $\angle$ AHD = 90°.
$\angle$ AHD + $\angle$ EHF = 90°. Donc

$\angle$ DHF = 90°.

Le triangle DHF est un triangle rectangle isocèle avec $DH^2 = a^2 + b^2$. Par la translation de vecteur $\overrightarrow{HD}$: H $\rightarrow$ D et E $\rightarrow$ C (DCEH est un parallélogramme : quadrilatère ayant deux côtés parallèles et de même longueur).

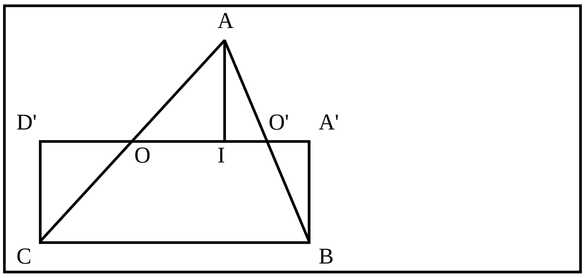
Soit K l'image de F par la translation de vecteur $\overrightarrow{HD}$. HFGD est un carré de côté c, l'aire est c^2 donc égale à $a^2 + b^2$. Le triangle GFK est bien l'image du triangle ADH par la translation de vecteur $\overrightarrow{HF}$.

D'où le découpage (voir la figure ci-dessus, page précédente).

passage d'un triangle quelconque à un carré de même aire

On veut passer d'un triangle à un rectangle de même aire par découpages finis.

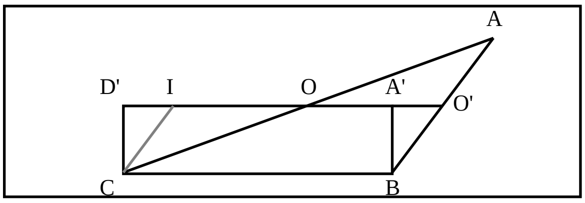
**** Cas numéro 1 :***
le triangle a trois angles aigus (figure ci-dessous). On trace le segment [OO'] où O et O' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB].



On trace la hauteur [AI] du triangle AO'O. On effectue une rotation de 180° de centre O, qui transforme le triangle AIO en le triangle CD'O. La rotation de 180° de centre O' transforme le triangle AO'I en le triangle BO'A'.

On obtient donc un rectangle A'BCD' de même aire que le triangle ABC (conservation des aires par rotation).

**** Cas numéro 2 :***
le triangle a un angle obtus (figure ci-dessous). On trace le segment [OO'] où O et O' sont les milieux respectifs de [AC] et [AB], et la perpendiculaire à [BC] qui passe par B et coupe [OO'] en un point A'.



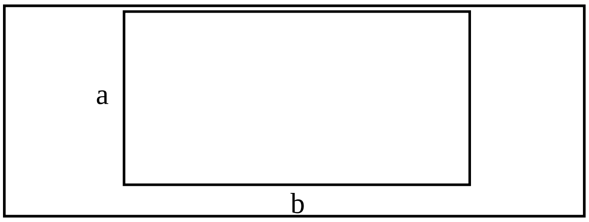
On effectue une rotation de 180° de centre O, qui transforme le triangle OAO' en le triangle OCI. La translation de vecteur $\overrightarrow{BC}$ transforme le triangle A'O'B en le triangle D'IC.

On obtient donc un rectangle A'BCD' de même aire que le triangle ABC (conservation des aires par rotation).

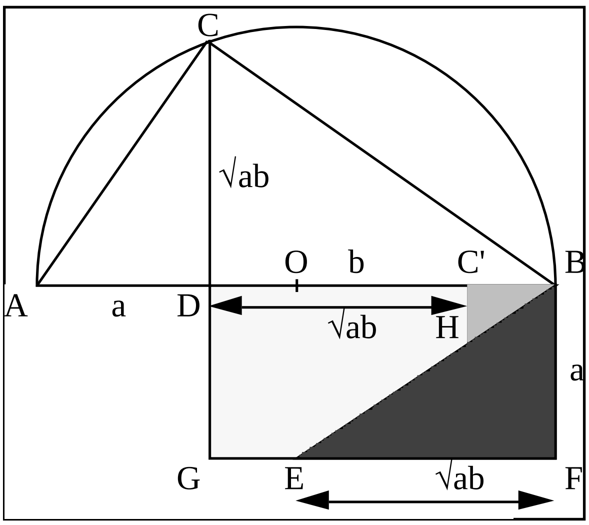
passage d'un rectangle quelconque à un carré

On veut passer d'un rectangle de côtés a et b quelconques à un carré de même aire par découpages finis.

Soit le rectangle DBFG (figure ci-dessous). Le carré cherché a une aire de ab donc son côté a pour longueur $\sqrt{ab}$.



Nous avons trouvé une méthode pour construire la longueur $\sqrt{ab}$ en n'utilisant qu'un compas (figure ci-dessous).



Il faut tout d'abord reporter la longueur a dans le prolongement de la longueur b. On obtient ainsi un segment [AB] de longueur a + b. Ensuite, on détermine le milieu O du segment [AB] à l'aide du compas. On trace le demi-cercle de centre O et de rayon [AO] et on prolonge le segment [DG] jusqu'au point C, intersection avec le demi-cercle.

Soit le triangle ABC rectangle en C (car C appartient au cercle et [AB] est un diamètre).

D'après le théorème de Pythagore on a :

$$AB^2 = AC^2 + CB^2.$$

Comme D appartient à [AB] :

$$(AD+DB)^2 = AC^2 + CB^2.$$

Dans le triangle ACD rectangle en D :

$$AC^2 = AD^2 + DC^2.$$

Dans le triangle CDB rectangle en D :

$$CB^2 = CD^2 + DB^2.$$

D'où en remplaçant :

$$(AD + DB)^2 = AD^2 + DC^2 + DC^2 + DB^2.$$

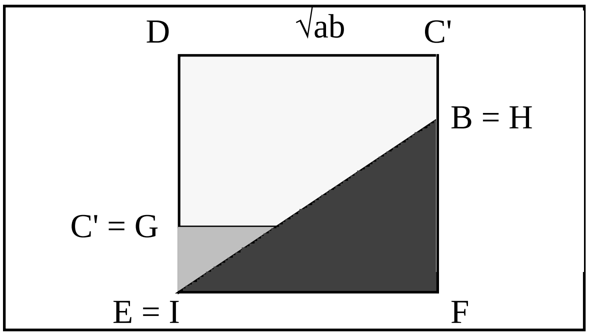
Comme AD = a et DB = b, alors :

$$(a + b)^2 = a^2 + DC^2 + DC^2 + b^2$$
$$a^2 + b^2 + 2ab = a^2 + 2DC^2 + b^2$$
$$2ab = 2DC^2,\ ab = DC^2$$
$$DC = \sqrt{ab}\ .$$

Donc le segment [DC] a pour longueur : $\sqrt{ab}$.

Nous allons passer du rectangle DBFG au carré DC'FI (figures précédente et ci-dessous).

On reporte à l'aide du compas la longueur du segment [DC] à partir du point D sur [DB] et à partir du point F sur [GF] de façon à obtenir respectivement les points C' et E.



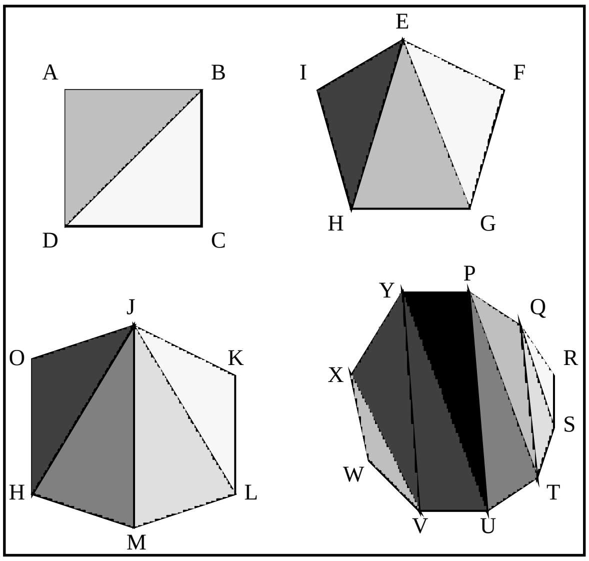
On trace le segment [BE] ainsi que le segment [C'H], segment parallèle à [BF] et coupant le segment [BE] en H. On obtient finalement 3 polygones DGEHC', C'HB et EBF. (voir figures précédentes).

On déplace le triangle rectangle C'HB par la tranlation de vecteur $\overrightarrow{BE}$ qui transforme le point B en le point E, le point C' en le point G et le point E en le point I. On déplace de même le triangle rectangle FBE par la translation de vecteur $\overrightarrow{BH}$ qui transforme le point B en le point H. On obtient finalement un carré DC'FI de côté $\sqrt{ab}$ car le carré a une aire de ab (conservation des aires par translation) et deux côtés [DC'] et [IF] de longueur $\sqrt{ab}$. (voir figures précédentes).

passage d'un polygone à des triangles

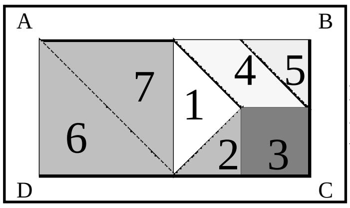
Remarque : Pour tout polygone à x côtés, nous pouvons déterminer le nombre minimum de triangles que nous pouvons découper. Ainsi, si nous avons un polygone à x côtés, alors son nombre minimum de triangles sera de : (x-2). En effet, un triangle a la somme de ses angles égale à 180 degrés, soit 180˚ pour un côté, et 0˚ pour les deux autres. Ainsi, si un polygone quelconque a la somme de ses angles égale à y°, alors il suffira de diviser y par 180 pour connaître le nombre de triangles minimum pour diviser ce polygone.

Exemples : Un carré (4 côtés) : nombre de triangles : 4 - 2 = 2 ; un pentagone (5 côtés) : nombre de triangles : 5 - 2 = 3 ; un hexagone (6 côtés) : nombre de triangles : 6 - 2 = 4 ; un décagone (10 côtés) : nombre de triangles : 10 - 2 = 8.



Le Tangram

A l'aide d'un jeu appelé Tangram nous pouvons aussi transformer un rectangle en un carré, par manipulations.



[ABCD est un rectangle et de plus : AB = 2 AD = 4 a]

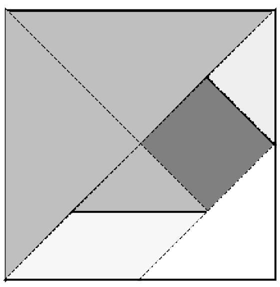
La pièce 1 est un triangle rectangle isocèle d'hypoténuse 2 a.

La pièce 2 et la pièce 5 sont des triangles rectangles isocèles de côté a.

La pièce 3 est un carré de côté a.

La pièce 4 est un parallélogramme de côtés a et $a\sqrt{2}$.

Les pièces 6 et 7 sont deux triangles rectangles isocèles de côté 2 a.



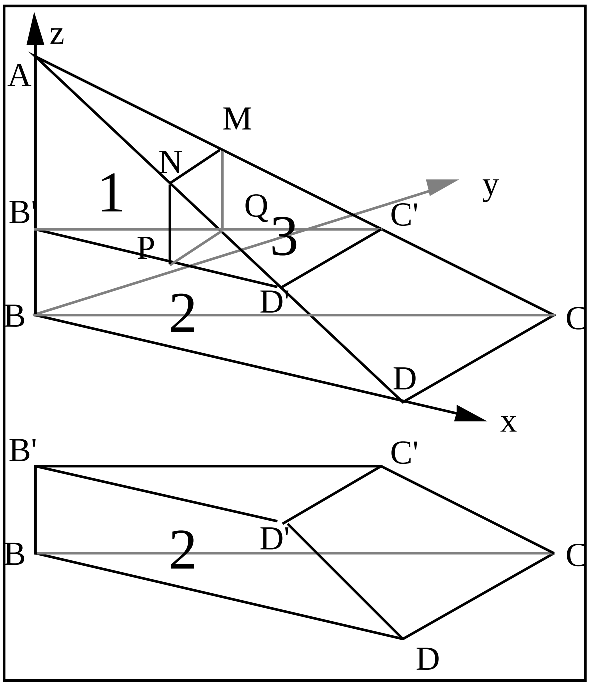
Transformation en un carré après manipulations.

les volumes

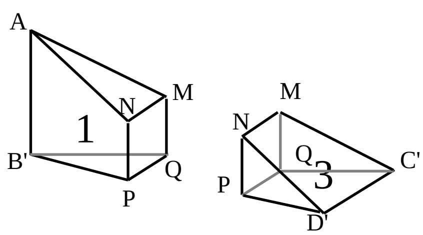
L'objectif est de passer d'un solide à un cube de même volume par découpages finis.

Tétraèdre de HILL

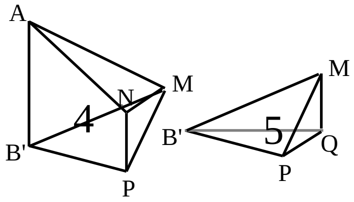
Ce dernier a en effet découvert en 1896, trois familles de tétraèdres de même volume qu'un cube par découpages finis.



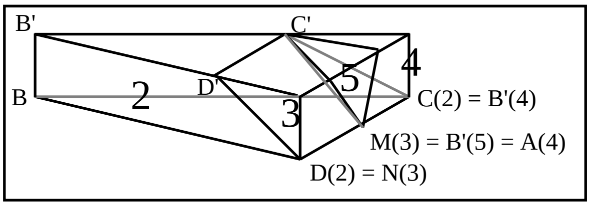
Par construction nous avons tout d'abord pu passer de l'un de ces tétraèdres à un prisme droit. On choisit un repère orthonormal pour lequel A(0, 0, 1) ; B(0, 0, 0) ; C(1, 1, 0) et D(1, 0, 0). On coupe la figure par le plan “z = 1/3”. On obtient les points B', C', D'. On réédite avec le plan “x = 1/3” pour obtenir les points M, N, P, Q. On continue en travaillant sur la base de manière analogue à celle du plan.



La pièce 1 est coupée suivant le plan B'PM et donne les pièces 4 et 5 :

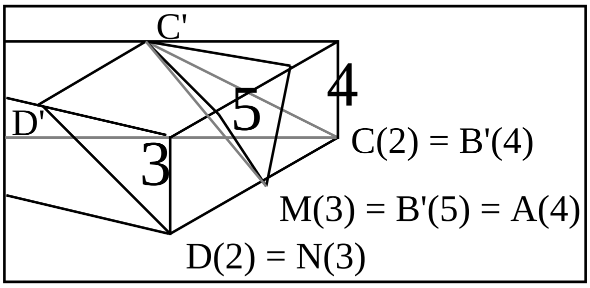


Redisposition des pièces 2, 3, 4, 5 pour former le prisme droit :



[NDLR : dans le dessin ci-dessus, les chiffres entre parenthèses indiquent le numéro de la pièce dans laquelle le point porte le nom indiqué. D(3) signifie que ce point est le point D quand on le voit comme point de la pièce 3. Le lecteur devrait comprendre ainsi comment les pièces ont été réajustées pour former le prisme final]

[détail ci-dessous :]



passage d'un pavé à un cube

On va, par découpages finis, transformer un pavé en un cube de même volume.

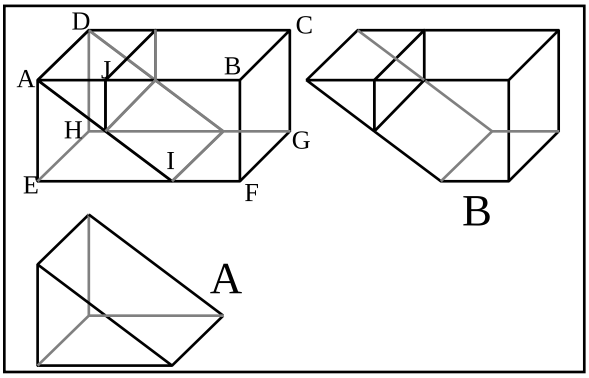
Soit un pavé ABCDEFGH, tel que : sa hauteur AE = a, sa longueur AB = b, sa largeur AD = c. Nous en déduisons que ce pavé a un volume abc. Or, nous cherchons un cube ayant le même volume que ce pavé. Donc, si nous prenons x le côté du cube obtenu après transformation, nous obtenons l'égalité suivante : $x^3 = abc$, donc : $x = \sqrt[3]{abc}$.

Le côté du cube obtenu sera donc de : $x = \sqrt[3]{abc}$. Pour découper le pavé, et en faire un cube, nous utilisons une méthode analogue à celle qui nous avait permis de passer d'un rectangle à un carré. Ainsi, nous définissons un point I, appartenant au côté [AB] du pavé, et tel que : $AI = x = \sqrt[3]{abc}$. Nous pouvons alors couper le pavé suivant un plan P, lequel étant défini par les points A, D, et I.

Nous obtenons alors deux solides, résultant de ce découpage :

→ un prisme droit à base triangulaire appelé prisme A,

→ un volume B, qui correspond au pavé de départ, auquel nous avons ôté le prisme A.



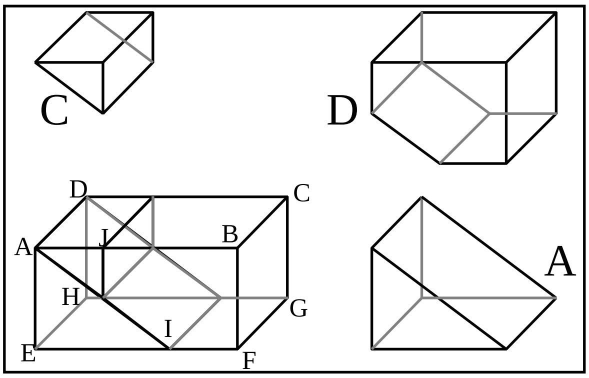
Considérons maintenant le volume B. Nous définissons un point J, appartenant au côté [AB] du volume B, tel que : BJ = x. Nous pouvons alors couper le volume B suivant un plan P', passant par le point J et étant parallèle au plan défini par les points B, C et F.

Nous obtenons alors deux nouveaux solides, résultant du découpage du volume B :

→ un prisme droit à base triangulaire appelé prisme C,

→ un volume D, qui correspond au volume B auquel nous avons ôté le prisme C.

Nous avons maintenant trois volumes, issus du même pavé. Les deux découpages précédents peuvent se résumer par la figure :

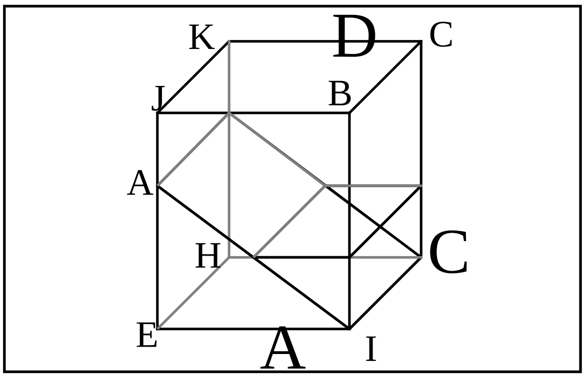


Nous allons maintenant assembler ces trois solides, de manière à obtenir un nouveau pavé, dont l'un des côtés mesurera le côté du cube à obtenir, soit x.

Nous déplaçons le prisme C, de manière à ce que le point A du prisme C soit confondu avec le point I du volume D, et que le point J du prisme C soit confondu avec le point F du volume D.

Nous déplaçons maintenant le prisme A, de manière à ce que la face ADHE du prisme A soit incluse dans le plan P' (ce dernier était parallèle à la face BCGF du volume D, et passait par le point J).

Nous obtenons alors la figure :



Nous avons donc obtenu un nouveau pavé, de dimensions :

→ hauteur JE = ab / abc,
→ longueur JB = abc,
→ largeur JK = c.

(Le volume de départ est conservé).

Dans ce nouveau pavé, nous allons effectuer les mêmes découpages que précédemment. Ainsi, sur le coté [KH], nous plaçons un point L, tel que : KL = x = $\sqrt[3]{abc}$.

Nous pouvons maintenant couper le pavé suivant un plan P, défini par les points J, B, et L.

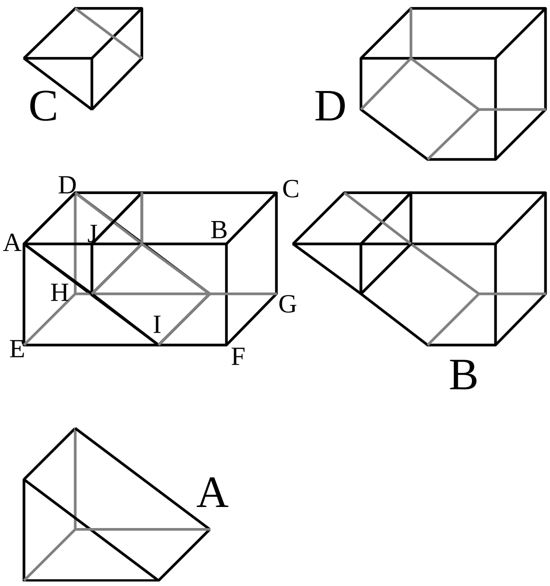
Nous obtenons alors deux nouveaux solides :
→ un prisme droit à base triangulaire appelé prisme E,
→ un volume F, qui correspond au pavé auquel nous avons ôté le prisme E.

Considérons maintenant le volume F. Nous définissons un point M, appartenant au coté [JE], tel que : ME = x. Nous pouvons maintenant couper le volume F suivant un plan P', parallèle au plan défini par les points E, I et H, et passant par le point M.

Nous obtenons alors deux nouveaux volumes :
→ un prisme droit à base triangulaire appelé prisme G,
→ un volume H', qui correspond au volume F, auquel nous avons ôté le prisme G.

Nous avons maintenant trois solides.

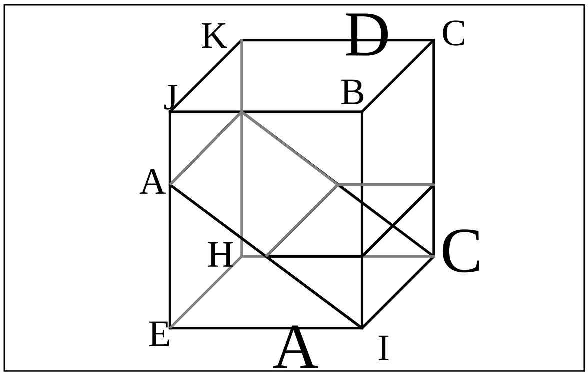
Les deux découpages précédents peuvent se résumer à la figure suivante :



Nous allons maintenant assembler ces trois solides, de manière à obtenir un cube de coté x. Ainsi, nous déplaçons le prisme G, de manière à ce que le point J du prisme G soit confondu avec le point L du volume H', et que le point M du prisme G soit confondu avec le point H du volume H'.

Nous déplaçons maintenant le prisme E de manière à ce que la face JBCK soit incluse dans le plan P' (ce dernier étant défini par les points E, I, et H du volume H', et passant par le point M).

Nous obtenons alors la figure :



Nous avons obtenu un nouveau pavé, dont le volume est identique au volume du pavé initial. Comme il y a conservation du volume, les dimensions du nouveau pavé sont : MK la hauteur, ME la longueur, MN la largeur. Et on a : $MK = ME = MN = \sqrt[3]{abc}$.

Tous les cotés de ce nouveau pavé étant identiques, nous en concluons que ce pavé est un cube, de volume abc.

conclusion :

Il est donc possible de passer d'un pavé à un cube de même volume, par découpages finis. Le côté de ce cube mesurera la racine cubique du volume du pavé.

conclusion

Il est désormais facile de passer d'un polygone quelconque à un carré de même aire par découpages finis.

En revanche, dans l'espace, il n'est pas toujours possible de passer d'un solide quelconque à un cube de même volume par découpages finis. Nous n'avons trouvé que deux cas :

— Passer d'un pavé à un cube.

— Passer d'un tétraèdre de Hill à un prisme, et même à un cube ; ***à vous de trouver comment …***

Commentaires du chercheur :

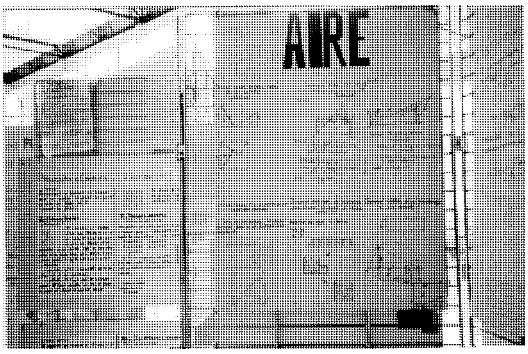
Première (petite) remarque : $a < b$ (ou $a > b$) n'a pas l'air de servir dans le passage : 2 carrés $\rightarrow$ 1 carré. *Deuxième remarque :* le cas numéro 1 (triangle $\rightarrow$ carré) marche même s'il y a un angle obtus, à condition de mettre l'angle obtus en A.

Passage d'un rectangle à un carré : il y a eu confusion entre le problème posé (existe-t-il un découpage etc …) et le problème de construction (à la règle, au compas, ou par un quelconque autre moyen). Les problèmes de constructions sont un tout autre domaine qu'il serait peut être intéressant d'explorer une prochaine fois.

Passage d'un polygone à un triangle. La formule x - 2 n'est pas prouvée. Ce qui est prouvé est y/180 et on ne fait pas le rapport entre y et x.

Passage du pavé au cube. La preuve serait plus claire si les élèves s'étaient aperçus que ce qu'ils font est un découpage passant d'un pavé à un autre pavé dont un côté est donné (inférieur à l'un des côtés du pavé d'origine). Ce découpage étant fait de prismes, on pourrait faire toutes les figures dans un plan, c'est-à-dire qu'on a en fait traité le problème du passage d'un rectangle à un autre : ça aurait valu la peine de l'expliquer.

Pour le pavé, il y a qu'a utiliser la méthode pour deux arêtes successives.


AIRE