

Les dominos

GARNIER Thomas (1^{re} S SI), APERT Alexy (T S SI), BREHIER Charlotte (T S SVT), CLAVEAU Romain (T S SI), HENNEQUIN Julie (T S SVT), LEBOT Cassandre (T S SVT)

Etablissement : Lycée Grandmont (Tours)

Encadrés par : BOUHAR Hakima, FLEURY Xavier, FRADELIZI Pascale

Chercheurs : DURIEU Olivier, GUILHOT Jérémie (Université François Rabelais)

Présentation du sujet :

Un jeu de dominos traditionnel est composé de telle sorte que toutes les paires possibles de numéros allant de 0 à 6 apparaissent une et une seule fois. La règle est la suivante : pour que deux dominos puissent se raccorder, il faut qu'ils aient un numéro en commun et que ce soit par ce numéro qu'ils se touchent.

Dans notre problème, on suppose qu'on peut construire un jeu de dominos non pas avec les numéros allant de 0 à 6, mais avec les numéros allant de 0 à n , n étant un entier naturel ($n \in \mathbb{N}$).

Combien y a-t-il de dominos dans le jeu ? Est-il toujours possible de tous les aligner ? Sinon, pour quelles valeurs de n est-ce possible ? Dans cet article, n sera toujours utilisé pour désigner le plus grand numéro composant le jeu de dominos. (Voir figure 0)

Observations et hypothèses de départ :

Dès nos premières manipulations de jeux de dominos, dont le numéro maximum était donc égal à 6, nous avons constaté qu'il était non seulement possible de tous les aligner, mais que de surcroît, il existait plusieurs façons de le faire. Il nous est aussi apparu qu'un alignement était systématiquement possible pour chaque n pair ($n = 2 \times k$; $k \in \mathbb{N}$) essayé, c'est-à-dire pour des valeurs de n ne dépassant pas 10 ou 12. De la même manière, nous nous sommes trouvés dans l'incapacité de d'aligner les jeux de dominos prenant pour valeur de n un nombre impair différent de 1 ($n = 2 \times k + 1$; $k \in \mathbb{N}$; $k \neq 0$). En effet dans ce cas [\(1\)](#), l'alignement est l'un des deux suivants : 0,0 – 0,1 – 1,1 ou 1,1 – 1,0 – 0,0.

Nous avons donc conjecturé que l'alignement était impossible si : $n = 2 \times k + 1$; $k \in \mathbb{N}$; $k \neq 0$ (pour un n impair différent de 1), et qu'il était possible dans tous les autres cas. Restait à le démontrer...

Concernant le dénombrement des dominos composant le jeu nous avons supposé que le nombre de dominos en fonction de n correspondait à une suite définie par : $u_0 = 1$; $u_{n+1} = u_n + n + 1$. En effet, lorsque $n = 0$, le jeu se compose d'un seul domino, le 0,0. Puis le nombre de dominos augmente de 2 puis de 3, quand on augmente toujours n de 1. (Voir figure 1) On observe également que ce nombre correspond à la somme des entiers consécutifs allant de 1 à $n + 1$. (Voir figure 2)

Calcul du nombre de dominos :

Pour calculer le nombre de dominos dans le jeu, nous avons préféré nous servir de la formule s'appuyant sur la somme. Nous avons constaté que, pour un jeu de dominos donné, si on range ces dominos dans un ordre « croissant »⁽²⁾, on obtient des colonnes de dominos de plus en plus petites et qui ont cette particularité : il y a autant de dominos dans les première et dernière colonnes cumulées que dans les deuxième et avant-dernière colonnes cumulées, et de la même façon, ce nombre ne varie pas pour le cumul des dominos des troisième et avant-avant-dernière colonnes, et cætera... (*Voir figure 3*) Dans la première colonne, le nombre de dominos s'élève à $n + 1$ (car la première colonne comporte également le double (0,0), et il y a un domino dans la dernière colonne. Ce cumul est donc égal à $n + 2$. Reste à multiplier $(n + 2)$ par le nombre de fois qu'on peut le former, c'est-à-dire par le nombre de colonnes $(n + 1)$ divisé par 2. On en conclut donc que le nombre N de dominos dans un jeu composé avec les numéros allant de 0 à n s'exprime ainsi :

$$N = (n + 2) \times \frac{(n + 1)}{2} = \frac{(n + 2)(n + 1)}{2} = \frac{(n^2 + 3n + 2)}{2}$$

On peut l'appliquer pour l'exemple d'un jeu de dominos traditionnel :

$$N = \frac{(6^2 + 3 \times 6 + 2)}{2} = \frac{(36 + 20)}{2} = 28$$

Remarque : nous venons simplement de calculer la somme :

$$N = \sum_{i=1}^{n+1} i$$

Preuve de l'impossibilité d'aligner tous les dominos si n est impair et différent de 1 :

Nous avons observé que dans le jeu, chaque domino⁽³⁾ apparaissait un même nombre de fois. Partant de là, nous avons tenu ce raisonnement logique : si les numéros apparaissent dans le jeu un nombre impair de fois, alors un exemplaire de chaque numéro ne peut être apparié. Le seul cas dans lequel ce n'est pas gênant pour l'alignement est celui pour lequel il y a possibilité de faire occuper les extrémités de l'alignement par les numéros inappariés. Ce n'est le cas que lorsque le jeu est composé de deux numéros, autrement dit, pour $n = 1$ (les deux numéros sont le 0 et le 1).

Reprenons tout cela plus mathématiquement. Le jeu compte $\frac{1}{2}(n + 2)(n + 1)$ dominos portant chacun deux numéros. Il y a donc dans le jeu $(n + 2)(n + 1)$ numéros au total. Etant donné qu'il y a $n + 1$ numéros différents dans le jeu (0 inclus), cela signifie que chaque numéro apparaît $\frac{(n+2)(n+1)}{(n+1)}$ fois, soit $(n + 2)$ fois puisque chaque numéro apparaît un même nombre de fois. On peut retrouver ce résultat plus simplement en considérant que, chaque combinaison de deux numéros existant dans le jeu de dominos, chaque numéro s'implique dans une combinaison avec chaque numéro, ce qui fait $n + 1$ combinaisons. Ce numéro apparaît donc $n + 2$ fois, puisqu'il apparaît 1 fois supplémentaire lors de son implication avec lui-même, un jeu de dominos comportant également des doubles.







Nous avons donc trouvé que chaque numéro d'un jeu de dominos composé des numéros allant de 0 à n apparaît $n + 2$ fois. De fait, si n est impair, $n + 2$ l'est aussi, et l'alignement est (sauf pour $n = 1$)

impossible. Or si n est impair, $n + 1$, qui correspond au nombre de numéros différents, 0 inclus, est pair. Il est donc possible de faire des petits alignements [\(4\)](#), non solidaires entre eux, prenant pour extrémités les numéros non appariés. Ce nombre de « cordons » s'élève à $\frac{n+1}{2}$, or, si $n = 1$, ce nombre vaut également 1, ce qui explique l'exception à cette règle d'impossibilité pour cette valeur de n .

Méthode d'alignement des dominos pour tout n pair :

Nous avons remarqué que l'alignement pouvait s'assimiler à une pseudo-relation de Chasles. Nous avons donc cherché un moyen infaillible de regrouper les dominos en petits alignements, ces petits alignements en alignements plus grands, jusqu'à n'avoir plus qu'un seul alignement. Cette méthode, trouvée au terme de tâtonnements, est loin d'être unique, mais son existence permet du moins de prouver qu'il est possible d'aligner les dominos d'un jeu construit avec les numéros allant de 0 à n'importe quel n pair.

La voici détaillée :

-  Ecarter les doubles, trier les dominos par ordre « croissant », et regrouper les colonnes deux par deux [\(Voir figure 4\)](#).
-  Considérer les deux colonnes les plus à droite et, ligne par ligne, regrouper les dominos par leur numéro commun [\(Voir figure 5\)](#). Les cordons ainsi formés sont tous identiques [\(5\)](#) (ils ont les mêmes extrémités).
-  Raccorder les cordons ainsi formés. Ces nouveaux cordons ont le même numéro à leurs deux extrémités [\(Voir figure 6\)](#).
-  Répéter ces deux opérations pour chaque paire de colonnes. Plus on approche des colonnes de gauche, plus les cordons issus de ces colonnes sont longs [\(Voir figure 7\)](#).
-  Insérer les petits cordons dans les plus grands, ce qui est toujours possible car les numéros dont sont formés les petits cordons sont également présents dans les plus grands [\(Voir figure 8\)](#).
-  Pour finir, glisser les doubles où bon semble [\(6\)](#) [\(Voir figure 9\)](#).

Etant donné qu'on commence par écarter les doubles, pour tout n pair donné, il y a n colonnes (il n'y a plus le double n, n tout à droite), et ce nombre de colonnes est pair également. Dans chaque paire de colonnes, les dominos peuvent toujours s'assembler deux à deux, car étant sur la même ligne, ils ont toujours un numéro en commun, et ces petits cordons peuvent toujours se rassembler côte à côte puis les uns dans les autres. Pour tout n pair, il existe donc au moins un alignement.

Remarque : dans un jeu, nous l'avons vu, chaque numéro apparaît un même nombre de fois. Or un alignement a deux extrémités. Ce qui signifie que lorsque n est pair, ce qui implique que chaque numéro apparaît un nombre pair de fois, les premier et dernier numéros sont nécessairement identiques, sans quoi deux numéros seraient en nombre impair, ce qui est absurde. De sorte, lorsque n est pair, on peut non seulement aligner mais aussi faire une « boucle » avec les dominos.

Il est donc possible d'aligner tous les dominos d'un jeu composé des numéros allant de 0 à 6 ou de 0 à 100, mais il est impossible d'aligner tous les dominos d'un jeu composé par exemple des numéros allant de 0 à 5 ou de 0 à 7.

Nouvelle explication par les graphes :

Une autre explication permet de démontrer qu'il est possible d'aligner les dominos pour tout n pair, qui se base sur la théorie des graphes. Avant tout, quelques notions pour les lecteurs qui ne sont pas familiers des graphes.

- Un GRAPHE est un ensemble de points ou SOMMETS reliés ou non par des ARÊTES.
- Un graphe est dit CONNEXE si pour toute paire de sommets distincts, il existe une liaison les reliant.
- Le DEGRÉ d'un sommet est le nombre d'arêtes arrivant au niveau de ce sommet.
- S'il est possible de parcourir tous les sommets en passant une seule et unique fois par toutes les arêtes, on dit qu'il existe pour ce graphe un CYCLE EULÉRIEN.

On peut assimiler topologiquement notre jeu de dominos à un graphe dans lequel les sommets représentent les numéros et les arêtes représentent les dominos (*Voir figure 10*). Puisque toutes les paires possibles de numéros apparaissent une et une seule fois dans le jeu de dominos, le graphe représentant tout jeu de dominos est connexe, ce qui implique que chaque sommet soit de même degré [\(7\)](#). On ne s'occupera pas dans cet exemple des doubles, qui peuvent être négligés et insérés à la fin, une fois un alignement trouvé. Si, donc, on ne compte pas les doubles, chaque sommet établit n arêtes (il y a bien $n + 1$ sommets en tout).

Un graphe n'est eulérien que si chacun de ses sommets est pair (théorie des graphes) [\(8\)](#). Or si n est pair, alors les sommets sont de degré pair et le graphe est eulérien, ce qui signifie qu'il est possible d'en parcourir toutes les arêtes une et une seule fois. Cela correspond, dans notre problème de dominos, à dire qu'il est possible d'aligner tous les dominos. [\(9\)](#) (*Voir figures 11 et 12*)

Nombre de possibilités d'alignement des dominos :

Pris par le temps et la fin de l'année, nous n'avons pu pourvoir cette section ni de généralisation ni de conclusion. Notre unique manière de trouver le nombre de façons d'aligner les dominos était simplement d'essayer toutes les combinaisons possibles, sans véritable méthode de dénombrement. Voici seulement quelques pistes...

- Une fois un premier alignement trouvé, il est possible de le replier sur lui-même pour former la « boucle ». De là, on peut choisir l'un des N dominos comme point de départ et décider de partir dans un sens ou dans un autre.
- Il est possible de choisir dans la boucle une section qui commence et termine par le même numéro et la retourner.
- En répétant cette dernière action, on trouve vite énormément de possibilités d'alignement, il y en a d'autant plus qu'il faut tenir compte de la première remarque.
- $\text{Nombre d'alignements} = (\text{Nombre de boucles}) \times (2 \times \text{Nombre de dominos})$ (Il s'agit là d'une hypothèse).
- Nous n'avons pas essayé de résoudre cette question par les graphes, mais c'est une possibilité envisageable.

Dominos composés des numéros allant de 0 à 4, rangés par colonnes

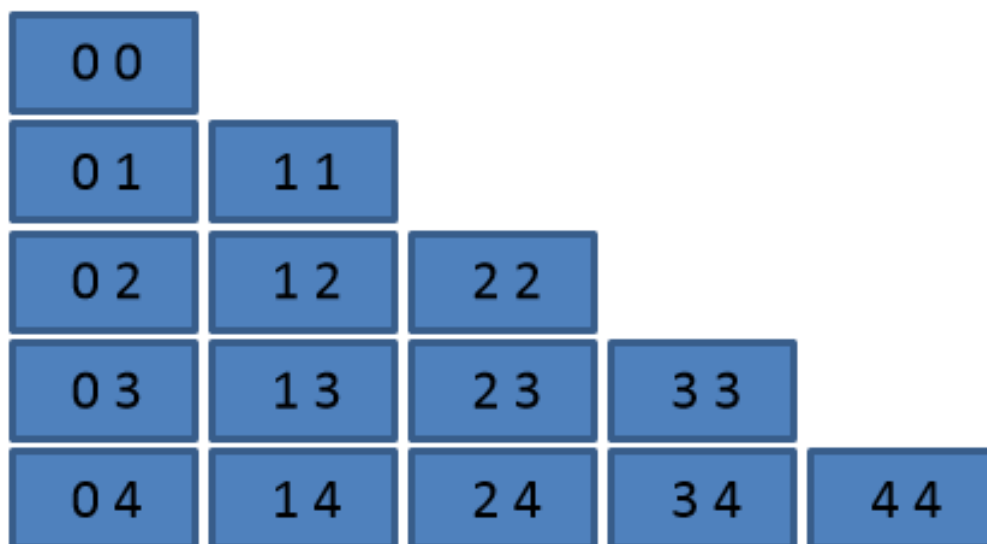


Figure 0

Possibilité de dénombrer les dominos grâce aux suites

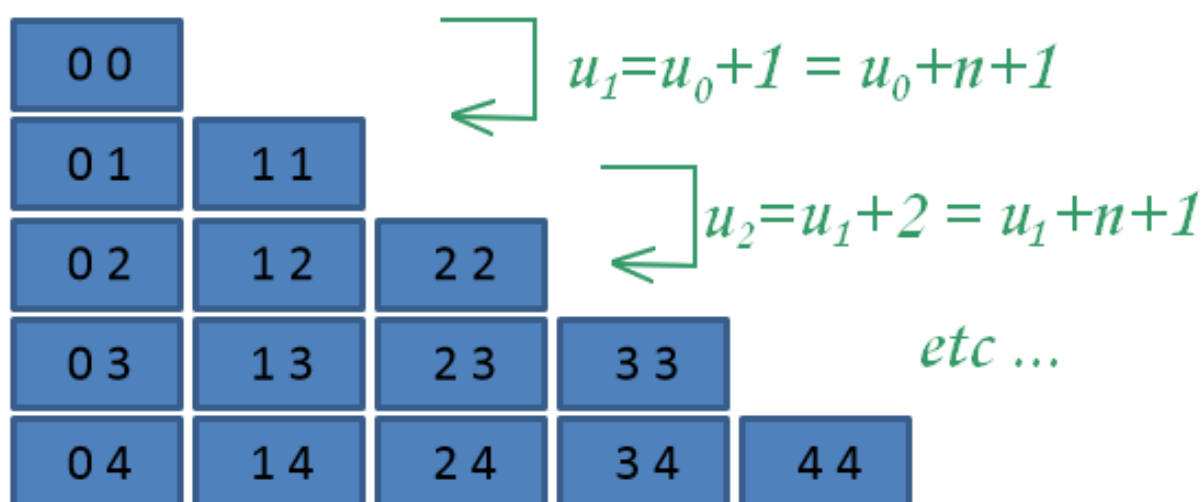


Figure 1

Possibilité de dénombrer les dominos grâce aux sommes

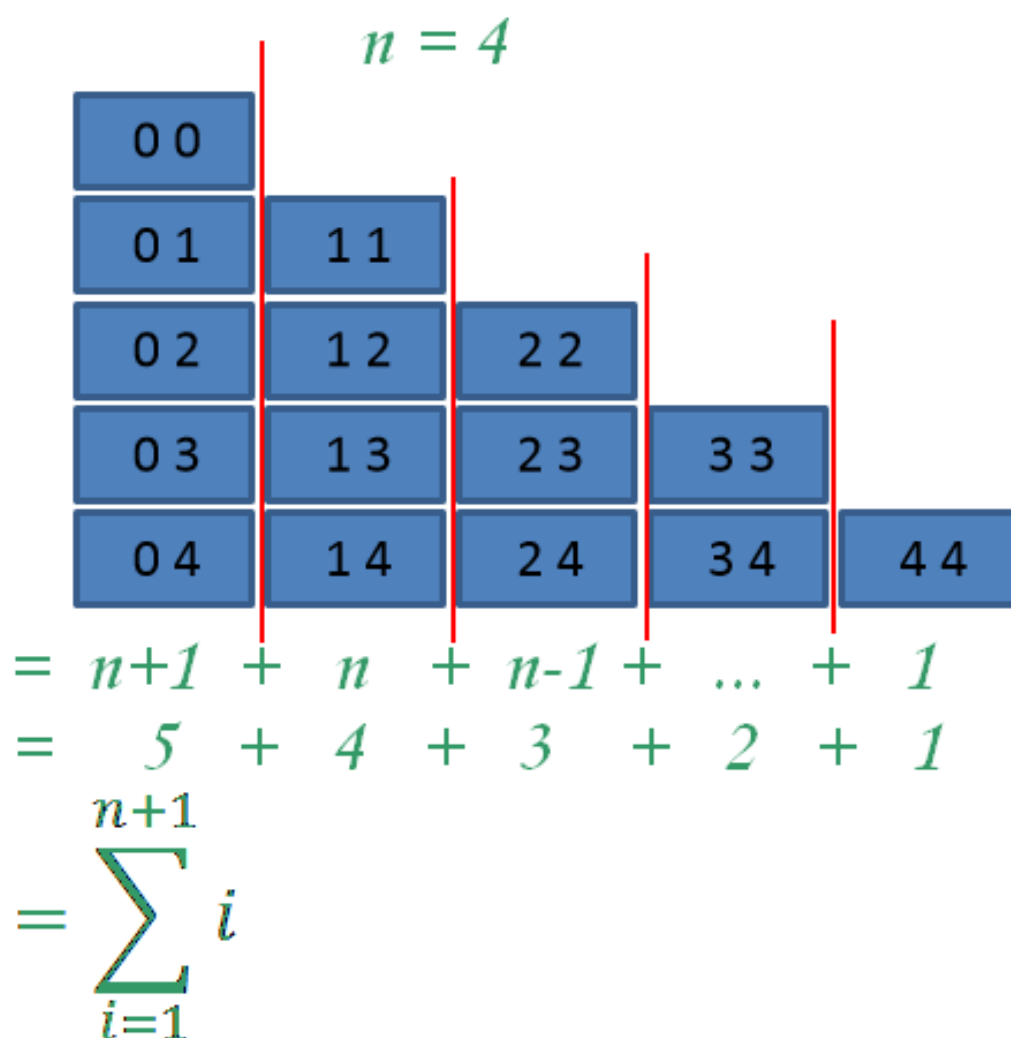


Figure 2

Dénombrement des dominos par sommes

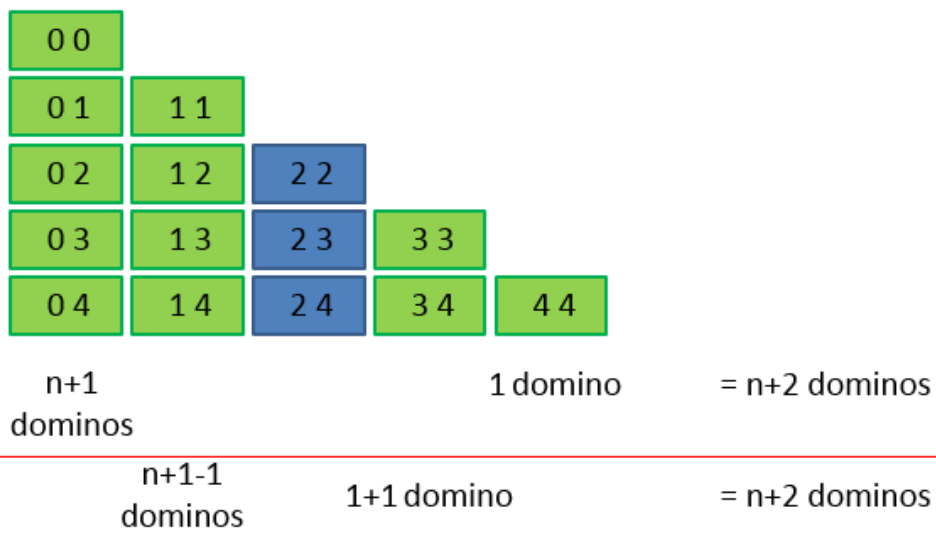
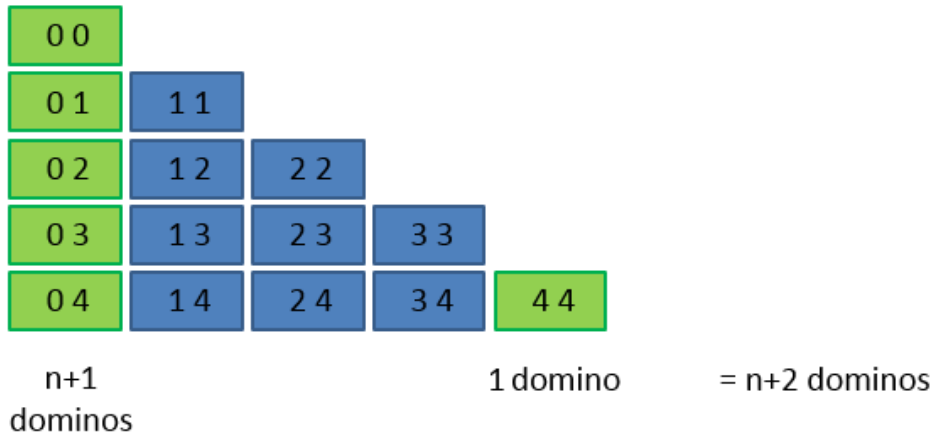
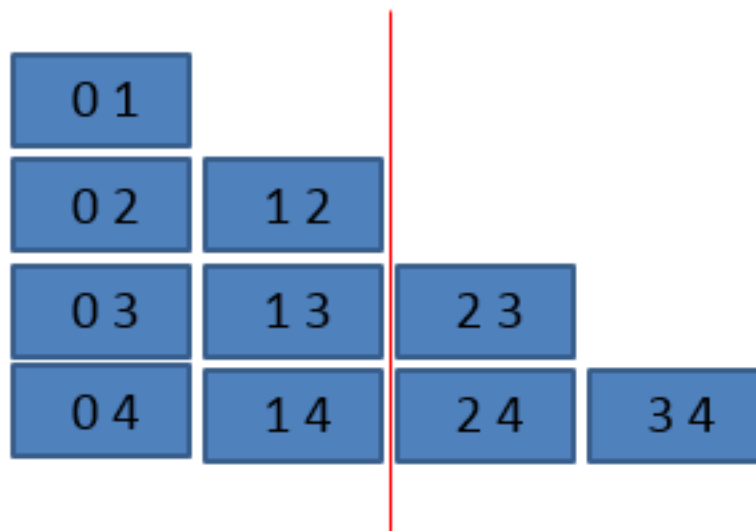


Figure 3



Tri et groupement des colonnes

Figure 4

Rassemblement des dominos des deux dernières colonnes

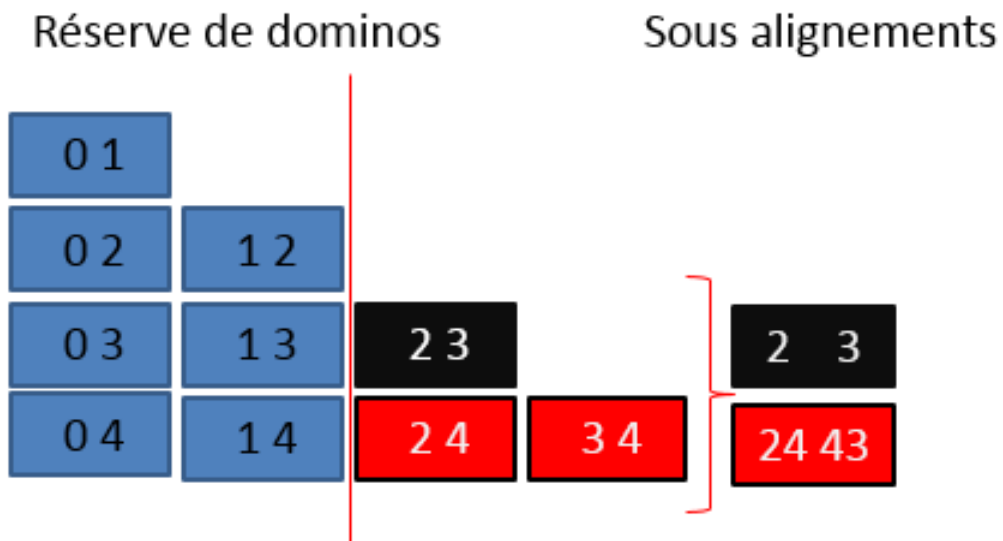


Figure 5

Rassemblement des cordons issus des deux dernières colonnes



Figure 6

Rassemblement des cordons issus des deux premières colonnes

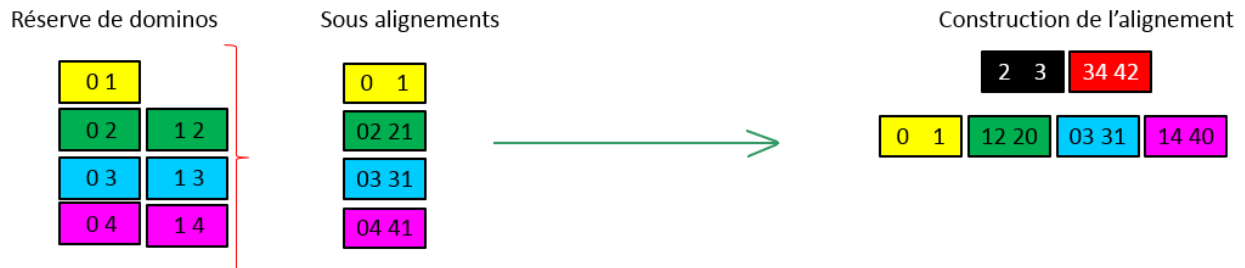
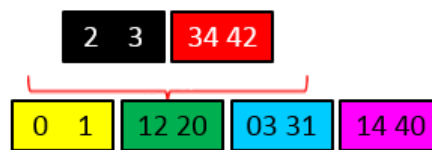


Figure 7

Insertion des petits cordons dans les plus longs



Résultat de l'alignement



Figure 8

Résultat de l'alignement

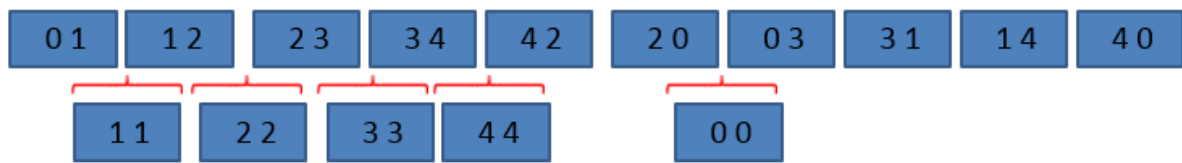


Figure 9

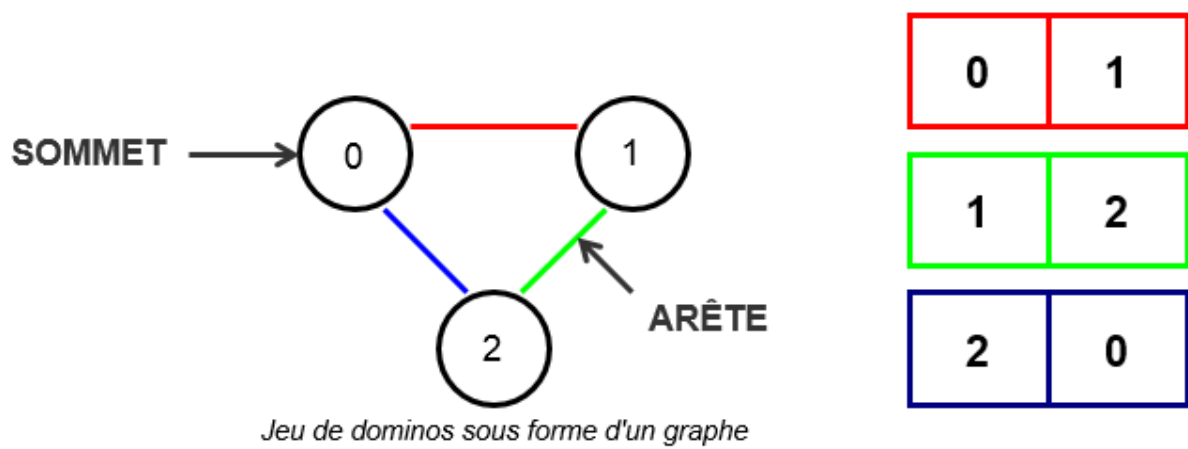
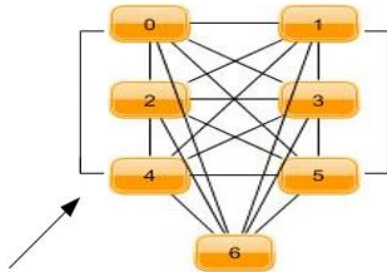


Figure 10

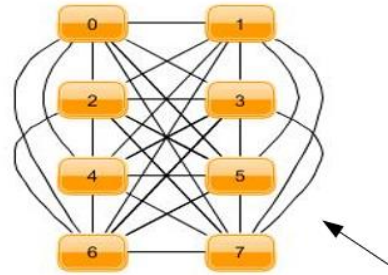
Théorie des graphes

Jeu de dominos allant de 0 à 6 :



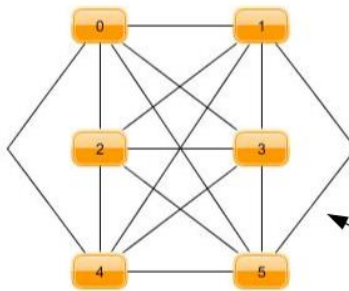
Comme tous les sommets sont de degré pair alors le graphe est eulérien. Ainsi, le jeu de dominos est alignable.

Jeu de dominos allant de 0 à 7 :



Comme tous les sommets sont de degré impair alors le graphe n'est pas eulérien. Ainsi, le jeu de dominos n'est pas alignable.

Jeu de dominos allant de 0 à 5 :



Comme tous les sommets sont de degré impair alors le graphe n'est pas eulérien. Ainsi, le jeu de dominos n'est pas alignable.

Figure 11

Pour pouvoir aligner les dominos, il suffit de suivre le « chemin » où on passe par toutes les liaisons sans « lever la main » il suffit ensuite d'aligner les dominos de la même façon que les liaisons comme ci-contre

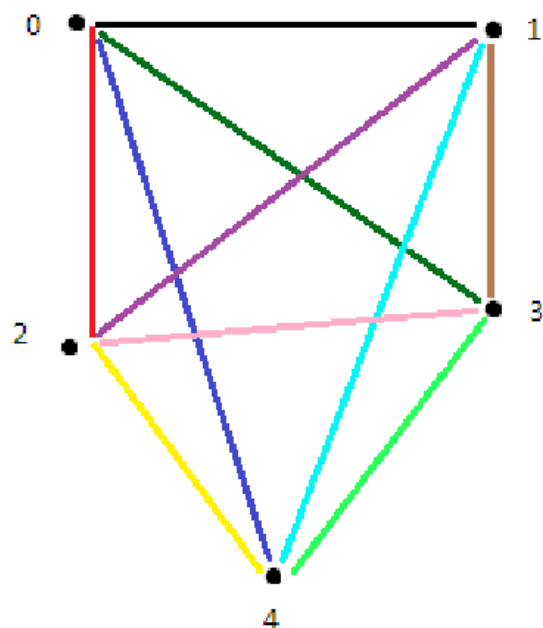


Figure 12

Notes d'édition

- (1) Il s'agit du cas $n=1$
- (2) Que veut dire ici ordre croissant ? La figure 3 nous indique qu'il s'agit de ce qu'on appelle « l'ordre lexicographique sur les couples (puisque sur cette figure les « paires » sont elles même rangées dans l'ordre croissant) : $(x,y) \leq (x',y')$ si, ou bien $x < x'$, ou bien $x \leq x'$ et $y < y'$.
- (3) On parle ici de numéro, pas des domino.
- (4) Ces alignements ne sont pas nécessairement « petits »
- (5) Ces alignements sont raccordables, mais pas identiques.
- (6) c'est-à-dire entre deux dominos accolés.
- (7) On peut avoir un graphe connexe avec des degrés différents pour les sommets (exemple un carré + une diagonale) Cependant pour le graphe décrit pour le jeu de dominos, tous les sommets ont même degré qui est n si on ne considère pas les doubles.
- (8) Voir le problème des ponts de Koenigsberg qui est l'origine des travaux du mathématicien suisse [Leonhard Euler](#) qui fonde la théorie des graphes.
- (9) cela prouve aussi que lorsque n est impair l'alignement de tous les dominos du jeu est impossible.