

Le jeu des allumettes

par Adelme BAZIN et Agathe MALBET, aidés par leurs professeurs M. CELLIER et M. LE BRUN

Nous avons recherché les solutions adéquates au jeu des allumettes dont voici l'énoncé:

Deux joueurs jouent au jeu des allumettes. Des petits tas d'allumettes sont donnés : à son tour, chaque joueur enlève un certain nombre d'allumettes d'un unique tas. Le gagnant est celui qui enlève la dernière allumette.

Dans quels cas est-ce que le premier joueur est sûr de gagner en connaissant la stratégie gagnante s'il ne fait pas d'erreurs, si le jeu contient:

- 2 tas?
- 3 tas?
- Et plus?

Nous y avons travaillé depuis octobre 2009 de manière empirique : nous avons d'abord fait des essais en jouant au hasard, puis nous avons découvert des façons de gagner. Enfin, nous avons dressé un tableau sur les cas à 3 tas.

Voici les résultats de nos recherches :

Un tas

I.1: Le premier gagne en prenant toutes les allumettes.

Deux tas

II.1: Si les 2 tas sont égaux en nombre d'allumettes, alors le deuxième gagne en jouant comme le premier (dans le tas dans lequel le premier n'a pas joué).

II.2: Si les 2 tas sont inégaux en nombre d'allumettes, alors le premier gagne en retirant le nombre d'allumettes qu'il faut pour mettre à égalité les 2 tas, puis en jouant comme dans la règle II.1 (à la place du second).

Les Tas Qui Sont égaux Deux à Deux (ou presque)

G.1: Si le nombre de tas est pair et que les tas sont égaux 2 à 2 en nombre d'allumettes, alors le deuxième gagne en jouant de façon identique au premier dans le tas jumeau (ayant le même nombre d'allumettes).

G.2: Si le nombre de tas est impair et que les tas sont égaux 2 à 2 en nombre d'allumettes sauf, bien sûr, le tas en plus, alors le premier gagne en supprimant le tas en plus, puis en jouant comme son adversaire.

G.3: Si le nombre de tas est pair et que les tas sont égaux 2 à 2 en nombre d'allumettes sauf 2 d'entre eux, alors le premier gagne en mettant les 2 tas inégaux à égalité, puis en jouant comme dans la règle G.1.

Trois tas

III.1: Si au moins 2 des 3 tas sont égaux, alors le premier gagne car on se retrouve dans le cas G.2

III.2: Si 2 tas contiennent des nombres d'allumettes qui sont consécutifs dont le plus petit est pair et que le dernier tas contient seulement 1 allumette (1 – 4 – 5 par exemple) alors le deuxième gagne:

- Si le 1er prend le tas avec une seule allumette, le 2ème gagne en jouant suivant la règle II.2.
- Si le 1er prend une ou des allumettes dans un tas qui contient plus d'une allumette, alors le 2ème gagne en faisant en sorte que les deux tas aient un nombre consécutif d'allumettes dont le plus petit est pair.

Voici le tableau que nous avons créé, ainsi que sa légende, pour voir si quelque chose en ressort.

- Les cases en blanc représentent les situations où le premier gagne.
- Les cases en gris représentent les situations où le deuxième gagne

PLAGE DE RECHERCHE						
1 1 1	1 4 5	2 2 7	2 7 7	3 6 7	4 7 8	6 7 8
1 1 2	1 4 6	2 2 8	2 7 8	3 6 8	4 7 9	6 7 9
1 1 3	1 4 7	2 2 9	2 7 9	3 6 9	4 8 8	6 8 8
1 1 4	1 4 8	2 3 3	2 8 8	3 7 7	4 8 9	6 8 9
1 1 5	1 4 9	2 3 4	2 8 9	3 7 8	4 9 9	6 9 9
1 1 6	1 5 5	2 3 5	2 9 9	3 7 9	5 5 5	7 7 7
1 1 7	1 5 6	2 3 6	3 3 3	3 8 8	5 5 6	7 7 8
1 1 8	1 5 7	2 3 7	3 3 4	3 8 9	5 5 7	7 7 9
1 1 9	1 5 8	2 3 8	3 3 5	3 9 9	5 5 8	7 8 8
1 2 2	1 5 9	2 3 9	3 3 6	4 4 4	5 5 9	7 8 9
1 2 3	1 6 6	2 4 4	3 3 7	4 4 5	5 6 6	7 9 9
1 2 4	1 6 7	2 4 5	3 3 8	4 4 6	5 6 7	8 8 8
1 2 5	1 6 8	2 4 6	3 3 9	4 4 7	5 6 8	8 8 9
1 2 6	1 6 9	2 4 7	3 4 4	4 4 8	5 6 9	8 9 9
1 2 7	1 7 7	2 4 8	3 4 5	4 4 9	5 7 7	9 9 9
1 2 8	1 7 8	2 4 9	3 4 6	4 5 5	5 7 8	
1 2 9	1 7 9	2 5 5	3 4 7	4 5 6	5 7 9	
1 3 3	1 8 8	2 5 6	3 4 8	4 5 7	5 8 8	
1 3 4	1 8 9	2 5 7	3 4 9	4 5 8	5 8 9	
1 3 5	1 9 9	2 5 8	3 5 5	4 5 9	5 9 9	
1 3 6	2 2 2	2 5 9	3 5 6	4 6 6	6 6 6	
1 3 7	2 2 3	2 6 6	3 5 7	4 6 7	6 6 7	
1 3 8	2 2 4	2 6 7	3 5 8	4 6 8	6 6 8	
1 3 9	2 2 5	2 6 8	3 5 9	4 6 9	6 6 9	
1 4 4	2 2 6	2 6 9	3 6 6	4 7 7	6 7 7	

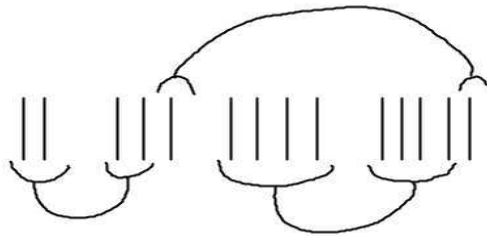
- Dans tous les cas où il y a un tas d'une allumette, pour que le premier gagne il suffit de ramener les autres tas à deux nombres consécutifs dont le plus petit est pair puis jouer comme dans la règle III.2.
- Dans les autres cas, soit deux tas sont égaux et on se trouve dans les conditions de la règle III.1 soit il faut se ramener aux cas en gris pour gagner (ou en jetant un coup d'œil sur les règles).

Durant le congrès, alors que nous présentions nos recherches, un chercheur nous a donné ce qui nous a paru être la solution. Nous n'avons pas eu le temps de tout tester. Nous livrons la règle telle que nous l'avons comprise et nous en donnons deux exemples :

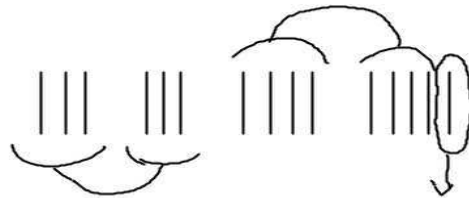
Au début du jeu, il suffit de découper chaque tas principal en sous-tas de façon à ce que chaque sous-tas ait un jumeau dans un autre tas principal. Il ne faut jamais avoir deux sous-tas identiques dans le même tas.

Si il est possible d'égaliser chaque tas et sous-tas, le premier perd, car il sera obligé de briser l'égalité. Le deuxième gagnera uniquement si il ramène à l'égalité avec le sous-tas jumeau que le premier aura brisé.

Si il est impossible d'égaliser chaque tas et sous-tas dès le début, le premier gagnera en enlevant les allumettes en trop pour qu'il y ait une égalité entre tous les tas et sous-tas et que le deuxième soit obligé de briser l'égalité



cas dans lequel le premier joueur perd. Le deuxième joueur joue comme le premier dans le tas "jumeau"



cas dans lequel le premier joueur gagne en enlevant le tas qui n'a pas de jumeau. On se retrouve alors dans le cas précédent.

Note d'édition

Dans cette dernière page, les auteurs évoquent une possibilité de solution donnée par un chercheur. Il n'est pas évident qu'elle marche : il se pourrait que le joueur prenne plus d'allumettes que celles contenues dans un sous-tas, et que les tas jumeaux soient repartis en plusieurs tas différents.

D'autre part, la question de l'existence de tel découpage en sous-tas n'est pas discutée