les nœuds

par Eric Akbaraly, Dorian Famibelle, Jean-Baptiste Lagaert, Eric Lebrun, Céline Trang du Collège Victor Hugo de Noisy le Grand (93)

enseignants : Pierre Lévy, Mauricette Ramillon

chercheurs : Olivier Bodini, Pierre Duchet

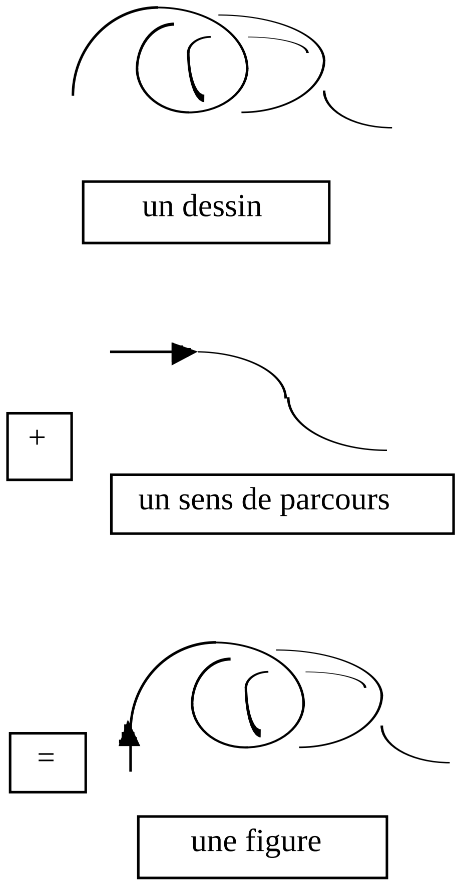
— lire les ficelles et les nœuds

Prenez une ficelle et faites ce que bon vous semble, un nœud par exemple ; sans lâcher les extrémités, posez votre ouvrage sur la table, et donnez un nom à chaque croisement de la ficelle avec elle-même. Lisons la ficelle de la main gauche à la main droite … quels mots peut-on lire sur les ficelles ?

Introduction

Un ***nœud*** est une boucle de ficelle dans l'espace.

Si on veut représenter ce nœud sur une feuille de papier, on obtient un dessin en deux dimensions. Si on choisit un sens de parcours de ce dessin, on obtient alors une ***figure*** qui sera la représentation du nœud.



Un ***mot*** est le codage d'une figure en respectant les règles suivantes :

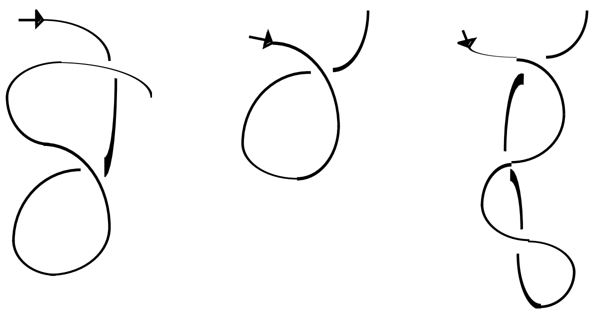
• On parcourt la figure en suivant le sens de parcours.

• On nomme chaque intersection rencontrée par une lettre de l'alphabet accompagnée d'un signe “ +” ou “ –” :

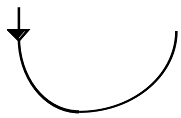
on attribue le signe “ +” à une intersection si la ficelle passe dessus sinon c'est le signe “ –”.

Quel est le lien entre nœud et figure ?

A un nœud donné, correspond une infinité de figures possibles. En effet, une figure est la représentation plane d'un objet en 3 dimensions ; elle dépend donc de la manière dont on regarde l'objet. Voici 3 figures qui peuvent être la représentation d'un même nœud.



En fait, toutes ces figures représentent ce que l'on pourrait appeler le ***nœud trivial***, c'est-à-dire le nœud dans laquelle il n'y a aucune intersection. La représentation la plus élémentaire du nœud trivial sera donc :

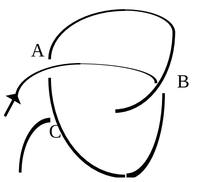


Nous appellerons toutes les figures correspondant à un même nœud, ***figures équivalentes*** et donc leurs codages correspondront à des ***mots équivalents***.

Voici une des questions sur lesquelles nous réfléchissons : " Comment reconnaître des figures et des mots équivalents ? ".

Quel est le lien entre figure et mot ?

A une figure donnée, correspond un mot unique. Cela est la conséquence des règles de codage. Voici une figure :



Voici son codage : $A^+ B^- C^+ A^- B^+ C^-$.
Dans une figure, il n'y a qu'un codage possible car il n'y a qu'un sens de parcours.

Quel est le lien entre mot et figure ?

Voici un mot :

$$A^+ B^- C^+ D^- B^+ C^- D^+ A^- \;;$$

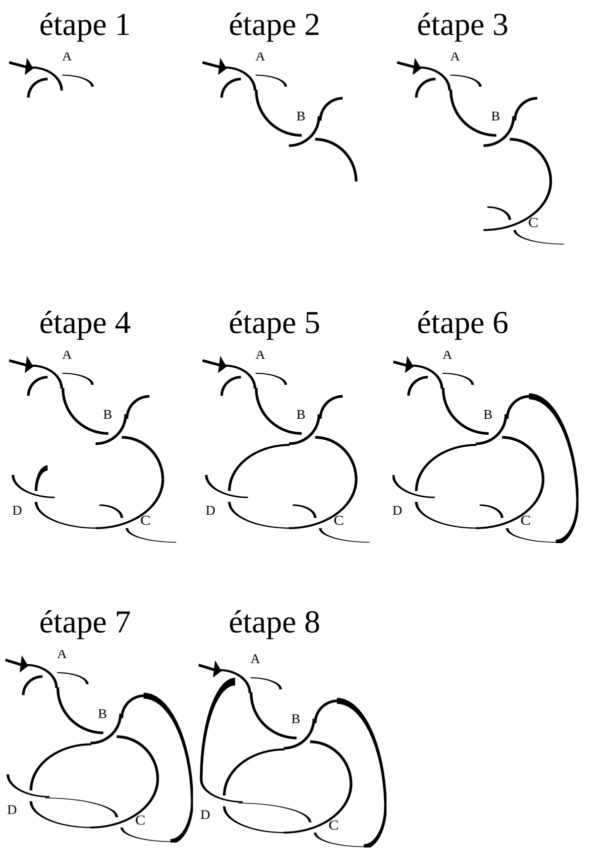
construisons la figure correspondant à ce mot.

Pour cela, la figure est construite d'intersection en intersection en positionnant correctement le ficelle à chaque fois. Lorsqu'on atteint une intersection déjà rencontrée, on relie les morceaux déjà tracés.

Si deux personnes réalisent cela, il y a fort peu de chances qu'elles obtiennent des figures semblables car à chaque étape, on peut varier à l'infinie la forme et la position du morceau de ficelle tracé.

Les figures obtenues sont différentes mais correspondent exactement au même mot.

Voici les étapes d'une construction possible :



Voici maintenant 4 figures possibles représentant toutes le même mot :

$$A^+ B^- C^+ A^- B^+ C^-.$$

figure 1

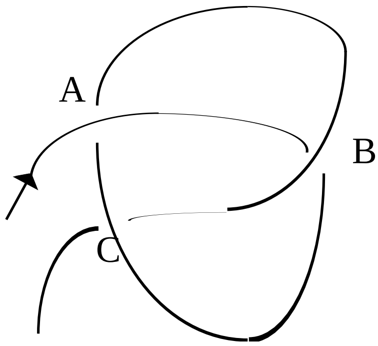


figure 2

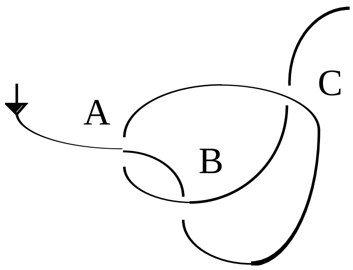


figure 3

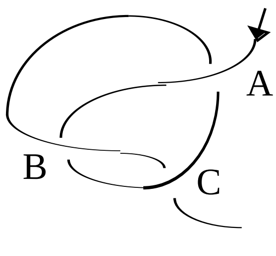
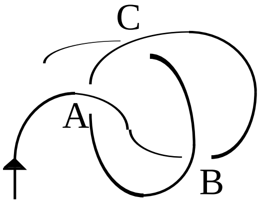


figure 4



En fait, ce n'est pas la forme de la figure qui est importante, mais le nombre d'intersections et la position de la ficelle à chaque intersection.

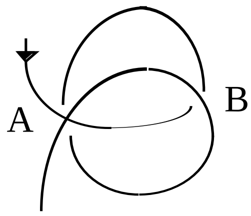
Mots possibles ou impossibles ?

Il existe des mots qui ne correspondent à aucune figure. Nous avons commencé à établir un certain nombre de conditions pour qu'un mot soit le codage d'une figure. On parlera alors de ***mot possible*** en opposition aux ***mots impossibles*** qui ne correspondront à aucune figure.

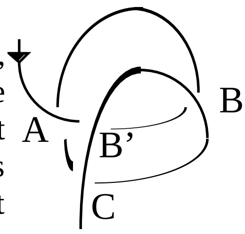
Un mot est impossible s'il comporte une lettre qui se répète avec le même signe.

En effet, cela signifierait par exemple que la ficelle passe deux fois de suite au même endroit en étant au dessus. On ne sait pas coder une telle situation. On remplacera alors cette configuration par une autre.

Voici un exemple :



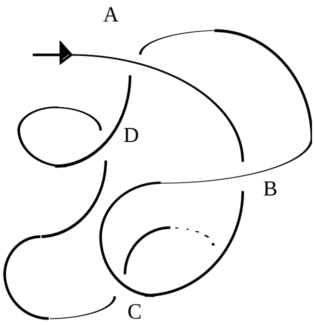
Dans la figure de gauche, la ficelle passe 3 fois à l'intersection A (2 fois par dessus). On remplace donc cette figure par la figure de droite :



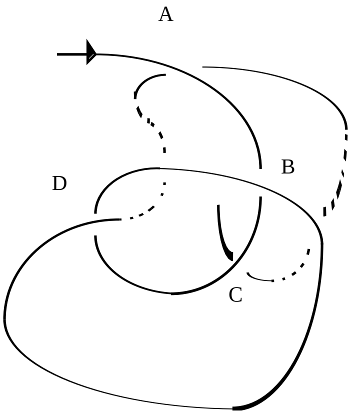
Un mot est impossible, s'il comporte une lettre isolée. Une lettre doit apparaître 2 fois avec des signes contraires. Cela est évident car si la ficelle passe en dessous à un endroit donné, c'est qu'elle repasse forcément dessus plus tard.

Il existe bien d'autres mots impossibles ; en voici quelques exemples :

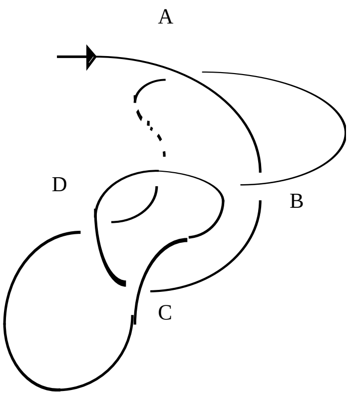
1/ $A^+ B^- C^+ B^+ A^- D^+ D^- C^-$



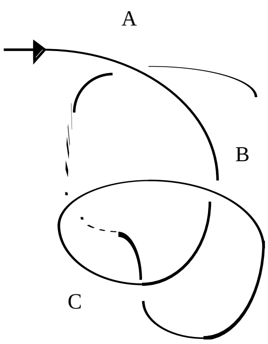
2/ $A^+ B^- C^+ D^- B^+ D^+ A^- C^-$



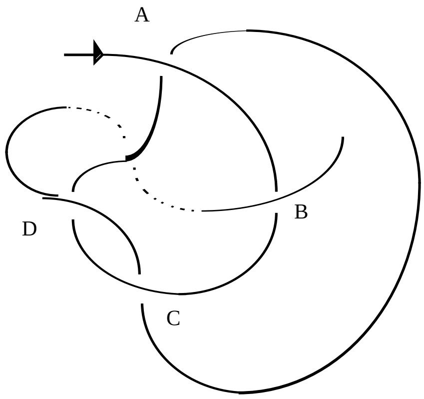
3/ $A^+ B^- C^- D^+ C^+ D^- A^- B^+$



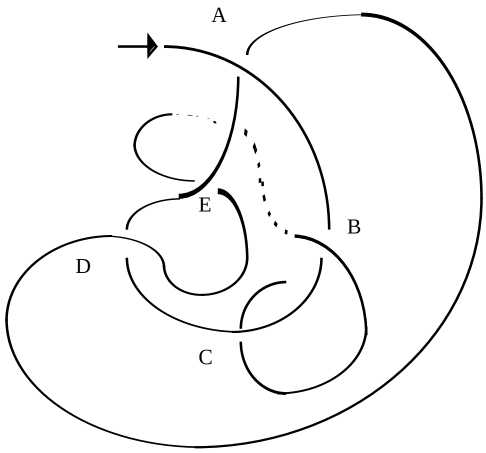
4/ $A^+ B^- C^+ B^+ C^- A^-$



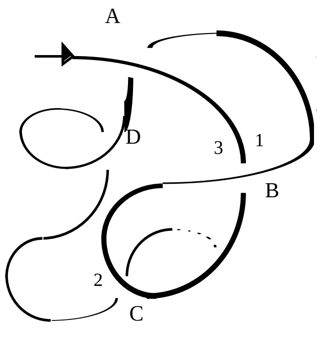
5/ $A^+ B^- C^+ D^- A^- C^- D^+ B^+$



6/ $A^+ B^- C^+ D^- E^+ A^- D^+ E^- B^+ C^-$



• Pour l'exemple 1, dans la boucle $A^+ A^-$ il y a 3 croisements. La partie en traits gras représente la boucle de ficelle comprise entre A^+ et A^-. Etudions les autres boucles de cette ficelle ; on obtient les résultats suivants.



Dans la boucle $A^+ A^-$, il y a 3 croisements. Dans la boucle $B^- B^+$, il y a 1 croisement. Dans la boucle $C^+ C^-$, il y a 4 croisements. Dans la boucle $D^+ D^-$, il y a 0 croisement.

• Pour l'exemple 2, procédons à une étude semblable.

Dans la boucle A^+ A-, il y a 5 croisements.
Dans la boucle $B^- B^+$, il y a 2 croisements.
Dans la boucle $C^+ C^-$, il y a 4 croisements.
Dans la boucle $D^- D^+$, il y a 1 croisement.

• Pour l'exemple 3, on obtient :
Dans la boucle A^+ A^-, il y a 5 croisements.
Dans la boucle B^- B^+, il y a 5 croisements.
Dans la boucle C^- C^+, il y a 1 croisement.
Dans la boucle D^+ D^-, il y a 1 croisement.

• Pour l'exemple 4, on obtient :
Dans la boucle $A+A^-$, il y a 4 croisements.
Dans la boucle B^- B^+, il y a 1 croisement.
Dans la boucle C^+ C^-, il y a 1 croisement.

• Pour l'exemple 5, on obtient :
Dans la boucle A^+ A^-, il y a 3 croisements.
Dans la boucle B^- B^+, il y a 5 croisements.
Dans la boucle C^+ C^-, il y a 2 croisements.
Dans la boucle D^- D^+, il y a 2 croisements

• Pour l'exemple 6, on obtient :
Dans la boucle A^+ A^-, il y a 4 croisements.
Dans la boucle B^- B^+, il y a 6 croisements.
Dans la boucle C^+ C^-, il y a 2 croisements.
Dans la boucle D^- D^+, il y a 2 croisements.
Dans la boucle E^+ E^-, il y a 2 croisements.

Pour les 5 premiers de ces mots impossibles, on trouve un nombre impair de croisements à l'intérieur d'une boucle. Il y a un moyen simple de l'expliquer : prenons une simple boucle. Quand la ficelle rentre dans celle-ci, elle crée un premier croisement, puis un deuxième lorsqu'elle en sort. Si elle entre à nouveau, elle devra en ressortir en créant un nouveau croisement et ainsi de suite.

Si, à l'intérieur d'un mot, on a un nombre impair de croisements dans " l'espace " délimité par les deux apparitions d'une même lettre, c'est qu'il manque soit une " entrée ", soit une " sortie " à la boucle. Le mot est donc impossible.

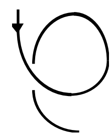
Cette règle ne permet pas de régler tous les cas car elle ne s'applique pas à l'exemple 6. Nous avons à ce sujet quelques conjectures que nous n'avons pas le temps de vérifier.

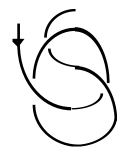
Notre travail cette année s'achève sur ce dernier point. Nous avons au cours de notre recherche défini une notion supplémentaire : " les nœuds noués ". Nous n'avons pas eu le temps non plus d'explorer cette voie, mais nous pensons que cela pourrait intéresser de futurs jeunes chercheurs de Math en Jeans.

Les nœuds noués.

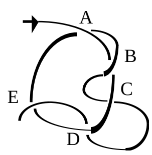
On appelle ***nœud non noué*** tout nœud qui lorsqu'on tire sur les 2 extrémités correspond au nœud trivial. Un ***nœud noué*** sera le contraire.

Voici un nœud non noué Voici un nœud noué





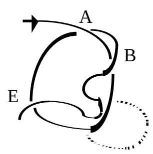
Comment reconnaître des nœuds noués ? Pour mieux étudier cette question, nous avions l'idée d'utiliser la notion de mot équivalent définie plus haut. Nous avons cherché à établir des règles de simplifications afin de remplacer un mot donné par un autre équivalent beaucoup plus simple à étudier. Voici un exemple :



La figure de gauche est codée par : A^+ B^- C^+ D^+ E^- A^- B^+ C^- D^- E^+ ,

" C^+ D^+" et " C^- D^-" permet d'écrire un mot équivalent plus simple :

A^+ B^- E^- A^- B^+ E^+ , dans lequel on a supprimé les intersections C et D. La figure ci-dessous en est la représentation.



Bon courage aux camarades qui souhaiteront reprendre ces idées.