La planche du fakir

et le découpage de polygones

par

Damien CHAVEROUX, Emmanuelle LEGAY, Lucas QUANTIN, Céline SCHAEFFER
du lycée Maine de Biran (Bergerac)

&

Marie Laure DUCHAMP, Cécile LABORDE, Quentin LORNE, Nicolas PEYROUX, Julia PUJOL
du lycée Kastler (Talence)

Enseignants : *Hervé CHASTAND, Martine HUGUET, Carl LACAUD, Jean-Claude RENOULT, Martine SAPHARY (Lycée Maine de Biran) &Véronique BAYART, Eugénie COHEN, Paul LAILHEUGUE (Lycée Kastler)*

Chercheur : *Frédéric BAYART (LaBAG, Université de Bordeaux I)*

Jumelage MATh.en.JEANS *et ateliers de pratique scientifique, année scolaire 2004-2005.*

[Article vérifié et annoté : les passages entre crochets sont des éditeurs]

[L'icone renvoie au Glossaire MATh.en.JEANS , à un document]

[**Résumé.** (par les éditeurs) Le fakir possède une planche à clous : c'est une planche en bois dans laquelle on a planté des clous espacés de 1 unité sur des lignes et des colonnes. On pose un élastique autour des clous. Cela forme des triangles, des polygones... Les auteurs étudient quels triangles sont possibles : peuvent-ils être "presque rectangles" ? équilatéraux ? presque équilatéraux ? Puis, étudiant un autre problème, ils proposent une méthode de découpage qui transforme tout polygone en rectangle, en carré.]

Mots clefs. PLAN, POLYGONE, SOMMET ENTIER, TRIANGLE ÉQUILATÉRAL, PRESQUE ÉQUILATÉRAL, PRESQUE RECTANGLE, DÉCOUPAGE, CARRÉ, EQUATION DIOPHANTIENNE, PELL, FERMAT, PLANCHE DU FAKIR

[Introduction]

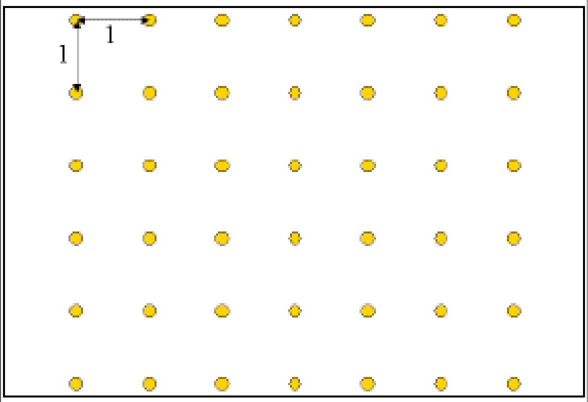


Figure 1

Il s'agit d'une planche en bois
dans laquelle on a planté des clous
espacés de 1 unité
sur des lignes et des colonnes.

Sur cette planche [à clous], on installe des élastiques pour former :

Des triangles rectangles et presque rectangles
Des triangles équilatéraux
Des triangles presque équilatéraux
Des polygones ...

Puis on s'est demandé s'il était possible d'avoir ces formes et de [les] découper pour former d'autres polygones : [..] carrés, rectangles, triangles ...

1) Triangles presque rectangles, est-ce possible ?

Par définition pour un triangle presque rectangle : $a^2 = b^2 + c^2 \pm 1$

On remarque que le triangle, étant sur des clous, est inscrit dans un rectangle de cotés entiers P et M. [voir note 1]

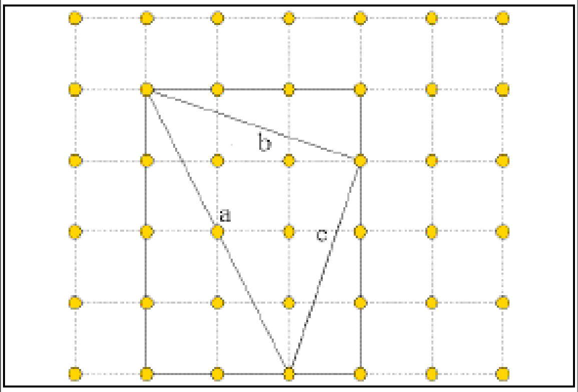


Figure 2

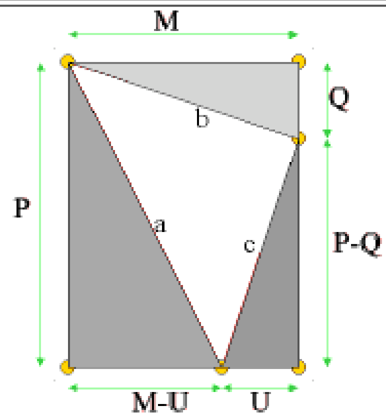


Figure 3

On déduit donc grâce aux autres longueurs Q et U les [longueurs] M-U et P-Q.

Cela permet de donner aux 3 autres triangles rectangles (en gris) dont a, b, c sont les hypoténuses, leurs dimensions.

Grâce au théorème de Pythagore, on peut donc exprimer les côtés a, b, c.

$a^2 = P^2 + (M-U)^2$
$b^2 = M^2 + Q^2$
$c^2 = U^2 + (P-Q)^2$

Si notre triangle est rectangle : $a^2 = b^2 + c^2$.
Or il est presque rectangle : $a^2 = b^2 + c^2 \pm 1$

On remplace donc :

$a^2 = b^2 + c^2 \pm 1$
$P^2 + (M-U)^2 = M^2 + Q^2 + U^2 + (P-Q)^2 \pm 1$
$P^2 + M^2 - 2MU + U^2 = M^2 + Q^2 + U^2 + P^2 - 2PQ + Q^2 \pm 1$
$- 2MU = 2Q^2 - 2PQ \pm 1$

A gauche comme à droite, les valeurs entières sont multipliées par un nombre pair, ce qui implique que les résultats seront pairs, sauf à droite où il y a ±1. Nous aurons donc un nombre impair :

Pair = impair

C'est impossible.

[**Théorème 1.** *Aucun triangle de la planche du fakir ne peut être presque rectangle*]

2) Triangles équilatéraux, est-ce possible ?

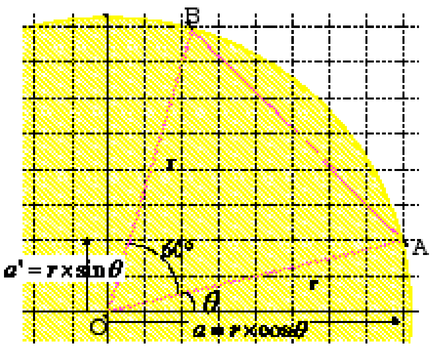


Figure 4

Par définition pour un équilatéral :
tous les cotés ont même longueur
et tous les angles valent 60°= 1/3

Ici les côtés de notre triangle s'appellent tous r.
Prenons le point de coordonnées entières (a ; a') avec $a \neq 0$.

Cherchons les coordonnées (b ; b') de B en fonction de celles de A.

Dans le repère (Ox ; Oy) :
A a pour coordonnées polaires (r ; θ)
B a pour coordonnées polaires (r ; θ+ 60°)

D'où A [et B] ont pour coordonnées cartésiennes :

$a = r \times \cos\theta$	$b = r \times \cos(\theta+60°)$
$a' = r \times \sin\theta$	$b' = r \times \sin(\theta+60°)$

Appliquons les formules d'addition :

$$b = r \times (\cos\theta \cos 60° - \sin\theta \sin 60°)$$
$$b' = r \times (\sin\theta \cos 60° + \sin 60° \cos\theta)$$
$$b = r \times (\cos\theta \times \frac{1}{2} - \sin\theta \times \frac{\sqrt{3}}{2})$$
$$b' = r \times (\sin\theta \times \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} \times \cos\theta)$$
$$b = \frac{1}{2} a - \frac{\sqrt{3}}{2} a'$$
$$b' = \frac{\sqrt{3}}{2} a + \frac{1}{2} a'$$

Il se peut que $a' = 0$ donc $b = a/2$ et $b \in \mathbb{N}$.
Or $a \neq 0$, si $b' \in \mathbb{N}$, on peut écrire $\sqrt{3} = (2b'-a')/a$ *et* $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$

Or $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et on peut le prouver par l'absurde [voir encadré ci-contre]:

Conclusion

On a donc prouvé que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$ et donc [que] b' ne peut pas être entier.

De ce fait, il n'existe pas de triangles équilatéraux sur la planche du Fakir.

[Théorème 2.

Aucun triangle de la planche du fakir ne peut être équilatéral]

[$\sqrt{3}$ est irrationnel : une preuve par l'absurde]

On pose $p/q = \sqrt{3}$, p et q étant premier entre eux.

si $\sqrt{3} \in \mathbb{Q}$, alors $p^2 = 3q^2$,
donc 3 divise p^2 , d'où 3 divise p.

On pose $p = 3k$, *ce qui nous donne :*

$$9k^2 = 3q^2$$
$$p^2 = 3q^2$$

donc 3 divise q^2 , d'où 3 divise q.

Alors $q = 3k$ donc p et q ont un diviseur commun : 3

Cela est contraire à l'hypothèse de départ, qui donnait p et q premiers entre eux.

3) Triangles presque équilatéraux, est-ce possible ?

3a) Existence

PROBLEME : construire un triangle dont les longueurs des côtés sont trois entiers consécutifs, [de longueurs a-1, a et a+1.]

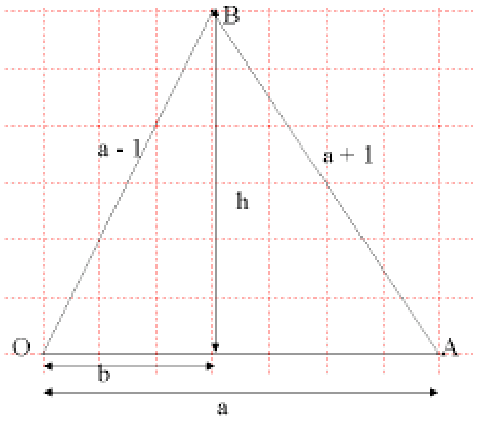


Figure 5

Nous nous sommes placés dans un cas particulier : un côté est parallèle aux clous ;
[il s'agit , comme l'indique la figure, du côté "moyen" du triangle, celui de longueur a. Par commodité, on appellera ce côté la *base* du triangle presque équilatéral.]

a doit être strictement supérieur à 1

Problème : Trouver trois entiers a, h et b tels que [dans la figure 5 on ait] :

OB = a-1 et AB = a+1

Avec le théorème de Pythagore :

- $(a - 1)^2 = b^2 + h^2$ **(1)**
- $(a + 1)^2 = (a - b)^2 + h^2$ **(2)**

(2) - **(1)** donne:

$(a + 1)^2 - (a - 1)^2 = (a - b)^2 + h^2 - b^2 - h^2$
$(a^2 + 2a + 1) - (a^2 - 2a + 1) = a^2 - 2ab + b^2 - b^2$
$a^2 + 2a + 1 - a^2 + 2a - 1$ &endash; $a^2 + 2ab = 0$
$4a - a^2 + 2ab = 0$
$a(4 - a + 2b) = 0$

a = 0 (impossible) ou 2b + 4 - a = 0

[ce qui] peut se lire

$a = 2b + 4$ **(3)**

ou

$b = (a - 4)/2$ **(3')**

a **doit être pair.**

En substituant (**3'**) dans **(1)** on obtient

$(a - 1)^2 = ((a - 4)/2)^2 + h^2$

soit

$4(a - 1)^2 - (a - 4)^2 = 4h^2$
$4a^2 - 8a + 4 - a^2 + 8a - 16 = 4h^2$
$3a^2 - 12 = h^2$

$h = -\frac{\sqrt{3a^2-12}}{2}$ IMPOSSIBLE ,

ou $h = \frac{\sqrt{3a^2-12}}{2}$

$h = \frac{\sqrt{3a^2-12}}{2}$ **(4)**

Sachant que a est pair, **peut-on trouver des valeurs de a qui rendent h entier ?** [voir note 2]

Avec une calculatrice ou un tableur on obtient des valeurs possibles [a_1, a_2, a_3, ... et donc des triangles T_1, T_2, T_3, ...] :

	a	h	b	a - b
T1	4	+ 3	0	4
x2 T2	= 14	+ 12	5	9
x2 T3	= 52	45	24	28
T4	194	168	95	99
T5	724	627	360	364
T6	2702	2340	1349	1353
T7	10084	8733	5040	5044
T8	37634	32592	18815	18819
T9	140452	121635	70224	70228

Figure 6

On trouve ainsi beaucoup de triangles [qui répondent aux conditions voulues].

Y-en a t'il une infinité ?

1ère conjecture :

on remarque [(dans toute la suite, chaque indice indique le numéro du triangle qui est considéré)] :

$(a_1 + h_1) \times 2 = a_2$
$(a_2 + h_2) \times 2 = a_3$

D'après le tableau on conjecture que [cette relation est générale] :

[Conjecture 1] $(a_n + h_n) \times 2 = a_{n+1}$ **(5)** [voir note 3]

Comment démontrer cette conjecture ? La question est encore ouverteÉ

3b) Autre conjecture et démonstration

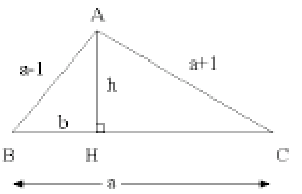


Figure 7

[Rappelons les relations obtenues précédemment.]

D'après le théorème de Pythagore :

$(a-1)^2 = b^2 + h^2$ **(1)**
$(a+1)^2 = h^2 + (a-b)^2$ **(2)**

[...][et on a aussi :]

$a = 4 + 2b$ **(4)**

On remarque que a est pair.

En substituant 4 + 2b à a, l'équation **(2)** [devient :] [...]

$(4 + 2b + 1)^2 = h^2 + (4 + b)^2$
$4b^2 + 20b + 25 = h^2 + b^2 + 8b + 16$
$3b^2 + 12b + 9 = h^2$
$3(b^2 + 4b + 3) = h^2$ **(6)**

Donc h^2 est divisible par 3, qui est premier.

Donc h est divisible par 3 [voir note 4] , soit h = 3k (k entier). **(7)**

$$9k^2 = 3b^2 + 12b + 9$$
$$3k^2 = b^2 + 4b + 3$$
$$b^2 + 4b + 4 - 3k^2 = 1$$
$$(b + 2)^2 - 3k^2 = 1 \quad \textbf{(8)}$$

[...][Posons] :

$X = b+2$ **(9)** et $Y = k$. **(10)**

Alors :

[**Proposition 1** :

$X^2 - 3Y^2 = 1$ **(11)** pour tout triangle presque équilatéral [à base horizontale].

On considère les triangles T_n et T_{n-1} de rang n et (n-1). (cf.)

Les triangles étant presque équilatéraux, on peut écrire:

$$X_{n-1}^2 - 3Y_{n-1}^2 = 1 \qquad \textbf{(11)}_{n-1}$$
$$X_n^2 - 3Y_n^2 = 1 \qquad \textbf{(11)}_n$$

A l 'aide des premiers triangles on remarque que:

$$\left.\begin{array}{l} X_{n+1} = 4X_n - X_{n-1} \\ Y_{n+1} = 4Y_n - Y_{n-1} \end{array}\right\} \textbf{(12)}_{n+1}$$

On cherche ensuite à montrer par récurrence que cette conjecture est vraie pour tout entier n [voir note 5]

Ceci permettra de connaître le triangle qui suit deux triangles déjà connus, en suivant !. [voir note 6]

Si l'équation $X_{n+1}^2 - 3Y_{n+1}^2 = 1$ [soit $\textbf{(11)}_{n+1}$] est vraie, alors, [de proche en proche la relation $\textbf{(11)}_n$ elle vraie pour tout *n* et] il existe une infinité de triangles presque équilatéraux.

On remplace X_{n+1} et Y_{n+1} à l'aide de nos conjectures [voir note 7]:

$$(4X_n - X_{n-1})^2 - 3(4Y_n - Y_{n-1})^2 = 1$$
$$16 X_n^2 - 8 X_nX_{n-1} + X_{n-1}^2 - 48 Y_n^2 + 24 Y_nY_{n-1} - 3 Y_{n-1}^2 = 1$$

On simplifie et on obtient alors la condition [suivante] équivalente [à $\textbf{(11)}_{n+1}$, sous l'hypothèse que $\textbf{(12)}_{n+1}$ est vérifiée] :

$$16 - 8 X_n X_{n-1} + 24 Y_nY_{n-1} = 0$$

$$X_n X_{n-1} - 3 Y_nY_{n-1} = 2 \qquad \textbf{(13)}_n$$

On va alors démontrer cette nouvelle égalité par récurrence. [voir encadré ci-dessous]

[**Proposition 2** :

Si les suites X_n et Y_n satisfont aux relations

$X_1 = 2$, $X_2 = 7$
$Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$

et , pour tout n > 1

$$\left.\begin{aligned} X_{n+1} &= 4X_n - X_{n-1} \\ Y_{n+1} &= 4Y_n - Y_{n-1} \end{aligned}\right\} \textbf{(12)}$$

Alors , pour tout n >1 on a

$$X_n X_{n-1} - 3\, Y_n Y_{n-1} = 2 \qquad \textbf{(13)}$$]

[**Preuve par récurrence de l'égalité**] $X_n X_{n-1} - 3\, Y_n Y_{n-1} = 2$

Au rang 1 : 2*7 - 3*4 = 14 - 12 = 2

Au rang 2 : 26*7 - 12*15 = 182 - 180 = 2

On suppose ensuite la propriété vraie [jusqu']au rang m, [avec $m \geq 2$].

On regarde au rang m+1. [Posons :]

$A = X_{m+1}X_m - 3\, Y_{m+1}Y_m$

Or $X_{m+1} = 4X_m$ &endash; X_{m-1} et
$Y_{m+1} = 4Y_m - Y_{m-1}$

$A = (4X_m - X_{m-1})\, X_m - 3\,(4Y_m - Y_{m-1})\, Y_m$
$A = 4X_m^2 - X_mX_{m-1} - 3\,(4Y_m^2 - Y_mY_{m-1})$
$A = 4(X_m^2 - 3Y_m^2) - X_mX_{m-1} + 3Y_mY_{m-1}$

Or $X_m^2 - 3Y_m^2 = 1$ [en effet cette équation équivaut à $X_{m-1} X_{m-2} - 3\, Y_{m-1}Y_{m-2} = 2$, d'après l'équivalence vue plus haut entre les équations $\mathbf{(11)}_{n+1}$ et $\mathbf{(13)}_n$], et $X_m X_{m-1} - 3\, Y_mY_{m-1} = 2$

4 - 2 = 2

Donc la propriété est vraie au rang m+1.

Donc, par récurrence, elle est vraie pour tout n.

[On a ainsi] $X_nX_{n-1} - 3\, Y_nY_{n-1} = 2$ [pour tout n] ; alors, oui on possède une infinité de triangles presque équilatéraux ! [voir note 8]

[Théorème 3.
Sur la planche du fakir, il existe une infinité de triangles presque équilatéraux à base horizontale]

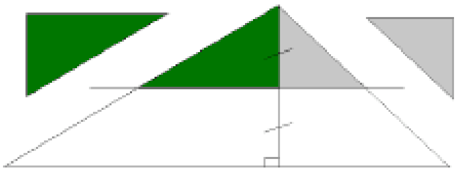
4) Découpage des polygones

[Les recherches précédentes ont inspiré un autre problème :

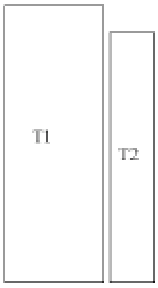
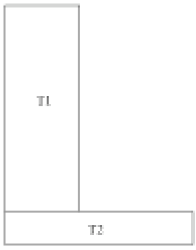
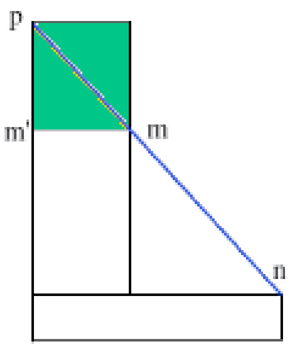
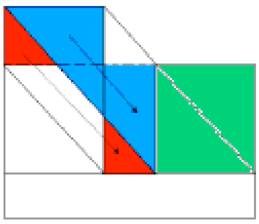
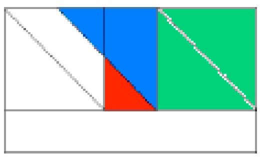
Peut-on par découpage passer d'un polygone à une autre forme plus simple,
comme un rectangle ou un carré ?

Le but est de fabriquer avec un polygone donné les pièces d'un puzzle rectangulaire ou carré.]

4.a) Triangles en Rectangles

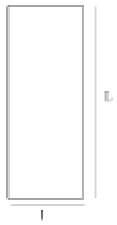
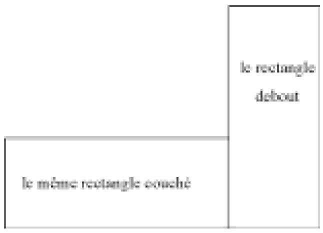
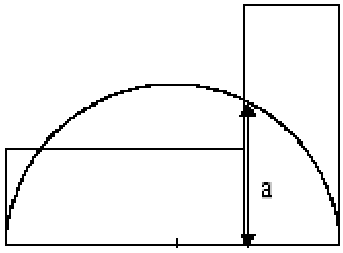
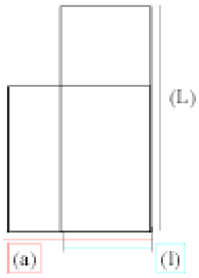
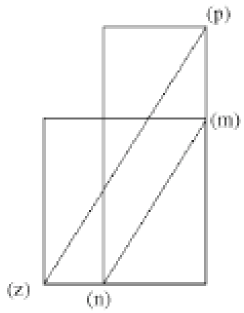
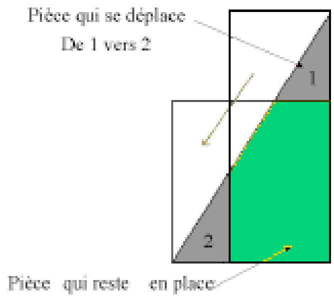
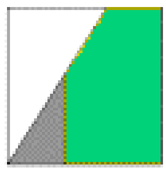
Dans un triangle quelconque, on trace [...] la hauteur puis on prend sa moitié,  *Figure 8*	on découpe les triangles obtenus et on les retourne	et voilà on a ... UN RECTANGLE  *Figure 9* [Ce découpage marche pour tout triangle : il suffit de prendre une hauteur intérieure au triangle.]

4.b) Deux rectangles en un seul

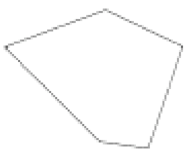
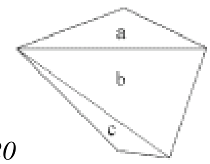
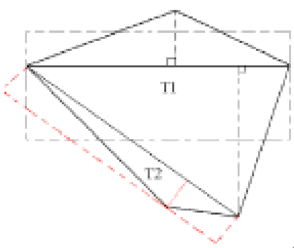
On a fabriqué T1 et T2.  *Figure 10*	Maintenant il faut les regrouper en un seul rectangle, donc on les dispose comme ceci :	 *Figure 11*
On trace le segment qui rejoint (p) et (n) pour trouver (m) un point de découpe... de (m) à (m').  *Figure 12*	[On effectue une seconde découpe suivant la parallèle à la droite (mn) qui passe par (m'), voir note 9] On effectue une translation des solides [selon le vecteur mn]  *Figure 13*	et voilà un rectangle ...  *Figure 14*

4.c) Rectangle en carré

Trouver a, le côté du carré de même aire [que celle d'] un rectangle quelconque de cotés L et ℓ

	Présentons le rectangle couché à côté du rectangle deboutÉ. 	On trace le demi-cercle de diamètre L + ℓ pour trouver a [note 10] 
En se servant de a trouvé précédemment, on relie le carré au rectangle en le superposant dans un coin.  *Figure 15*	On trace les diagonales qui relient le point (p) et (z) ainsi que (m) et (n) [note 11] (avec Thalès ces droites sont parallèlesÉ.)  *Figure 16*	 *Figure 17* Cela nous donne donc ... UN CARRE.  *Figure 18*

4.d) Un polygone quelconque en rectangle

On prend un polygone quelconque  *Figure 19*	que l'on partage en triangles (a, b, c, ...). [note 12]	 *Figure 20*
Grâce à la méthode pour transformer les triangles en rectangles, on obtient 2 rectangles  *Figure 21* (deux rectangles issus de a et b en un, [soit T1], car a et b ont une base commune et un [second] rectangle, [soit T2], issu de c)	A partir de ces 2 rectangles , on en forme un seul grâce à la méthode que l'on a vu en second (§ 4.b). [et on recommence, ... tant qu'il y a des triangles à découper]	Vous pouvez encore transformer le rectangle en carré etc. etc. ......

En conclusion

En se ramenant à des figures connues vous pouvez transformer des polygones à l'infini,
le but [nouveau !] étant de le transformer avec le moins de coups de ciseaux possible ...
BONNE CHANCE ...

***

Notes des éditeurs

Note 1. Les auteurs ne considèrent ici qu'un seul cas de figure. Le lecteur se convaincra sans peine que l'on peut toujours s'y ramener.

retour à l'appel de cette note

Note 2. D'après les calculs de longueurs qui précèdent, à tout nombre a correspond un triangle presque équilatéral de base horizontale a, et un seul, de cotés respectifs a, a-1 et a+1 ; son sommet A a pour ordonnée la hauteur relative au côté a, soit $h = \frac{\sqrt{3a^2-12}}{2}$ et pour abscisse le nombre b = (a - 4)/2 =a/2 - 2. Un tel triangle est donc une *solution* (c'est à dire a ses 3 sommets sur des clous de la planche du fakir) si a, h et b sont tous trois entiers, autrement dit si a est pair et si $3a^2$-12 est un carré parfait.

retour à l'appel de cette note

3. Précisons comment sont obtenues les valeurs successives a_1 , a_2 , a_3 , ... de a dans le tableau. L'entier a_1 est le premier entier qui convient, c'est à dire le premier entier pair a pour lequel le nombre $h = \frac{\sqrt{3a^2-12}}{2}$ est un entier strictement positif (on trouve a_1 = 4) ; l'entier a_2 est le deuxième entier qui convient (on trouve a_2 =14) , et ainsi de suite ... : a_n est le n-ième entier qui convient. Ce qui est conjecturé est l'assertion suivante : si on a trouvé n premières valeurs a_1 , a_2 , ... a_n qui conviennent pour les bases de triangles solutions, alors l'entier $a_{n+1} = (a_n + h_n) \times 2$ est précisément le prochain entier qui convient, comme base d'un nouveau triangle solution T_{n+1}. Si cette conjecture est vraie, non seulement elle montre l'existence d'une infinité de triangles solutions, mais de plus, elle implique que la construction de proche en proche des a_n donne tous les triangles solutions !

retour à l'appel de cette note

4. Une propriété fondamentale d'Arithmétique est utilisée ici : *si un nombre premier divise un produit de facteurs, il divise l'un de ces facteurs*.

retour à l'appel de cette note

5. A partir de ce point, hypothèses et conjectures ne sont plus clairement formulées par les auteurs. En particulier, les définitions et hypothèses nécessaires aux raisonnements par récurrence nous échappent, ce qui rend les résultats difficiles à restituer et incertains. La *conjecture* faite ici nous semble pouvoir être énoncée sous la forme suivante : si des triangles T_1, T_2 , ... , T_n , ... solutions ont été obtenus dans le tableau (voir note 3), le nouveau triangle T_{n+1} introduit par la relation **(12)** est un triangle solution (on remarquera que T_{n+1} est bien déterminé à l'aide des formules $a_{n+1} = 4+2b_{n+1}= 2X_{n+1}$, $b = X_{n+1}-2$ et $h_{n+1}=3Y_{n+1}$). Les auteurs semblent en particulier tenir pour acquise la réciproque de la proposition 1 : si $X_{n+1}^2 - 3Y_{n+1}^2 = 1$, alors T_{n+1} est presque équilatéral.

retour à l'appel de cette note

6. Maintenant, tout se passe comme si les triangles T_n avaient été définis de proche en proche à partir de T_1 et T_2 par la relation **(12)**, les suites d'entiers (X_n) et (Y_n) étant alors *définies* par les conditions :

$X_1 = 2$, $X_2 = 7$
$Y_1 = 1$, $Y_2 = 4$

et , pour n > 1

$X_{n+1} = 4X_n - X_{n-1}$
$Y_{n+1} = 4Y_n - Y_{n-1}$

Une nouvelle conjecture apparaît : ces entiers vérifient l'équation $X_n^2 - 3Y_n^2 = 1$, pour tout n, ce qui, disent les auteurs, est équivalent au fait que les triangles T_n sont presque équilatéraux.

retour à l'appel de cette note

7. La relation **(12)**, précédemment conjecturée, est devenue maintenant hypothèse, comme expliqué par la note précédente.

retour à l'appel de cette note

8. Résumons les points significatifs des raisonnements précédents.

i) La définition, implicite, des triangles T_n par la relation **(12)** à partir de T_1, T_2 garantit que les paramètres a_m , b_m , h_m sont entiers et donc que les sommets de chaque triangle sont sur les clous de la planche du fakir.

ii) La proposition 2 garantit que ces triangles satisfont la relation **(13),** et donc la relation équivalente **(11)** (plus précisément, $\mathbf{(13)}_n$

équivaut à **(11)**$_{n+1}$).

Si on accepte par ailleurs l'équivalence, non explicitement prouvée par les auteurs, entre **(11)**$_n$ et le fait que T_n est presque équilatéral, on a bien la conclusion annoncée: les triangles T_n sont solutions.

On remarquera que la conjecture 1 reste toutefois ouverte : même si on vérifiait que les bases a_n des triangles satisfont bien à la relation de récurrence $a_{n+1} =(a_n +h_n) \times 2$, rien n'interdirait encore l'existence entre a_n et a_{n+1} d'une valeur de a qui convienne comme base d'un autre triangle solution.

retour à l'appel de cette note

9. La justification complète de cette méthode de découpage ne nous est pas parvenue. La construction fournie fonctionne sous certaines hypothèses :

- La largeur du rectangle T1 est inférieure à la longueur du rectangle T2 : quite à échanger les rôles de T1 et de T2, cette hypothèse peut toujours être satisfaite.

- Dans le rectangle T1, le point (m) se situe au dessus du milieu du coté : que faire lorsque ce point se trouve au dessous, comme dans le cas de la figure ci-contre ?

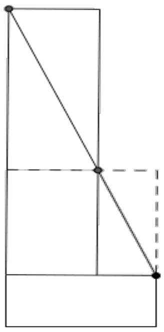


Figure 22

retour à l'appel de cette note

10. Dans un triangle rectangle, le carré de la hauteur issue de l'angle droit est égal au produit des segments qu'elle détermine sur l'hypothénuse.

retour à l'appel de cette note

11. La construction fonctionne sous l'hypothèse que la droite (pz) coupe la partie commune au carré et au rectangle.

retour à l'appel de cette note

12. Il est admis ici que tout polygone admet une décomposition en triangles.

retour à l'appel de cette note