

# AU MARCHÉ

## année 2012

LINDELL Johannes 2<sup>nde</sup>  
GASSOT Charles 2<sup>nde</sup>  
PERRON Rémy 2<sup>nde</sup>

Lycée Blaise PASCAL,  
18 à 20 rue Alexander Fleming  
91401 ORSAY

Enseignants :  
M. Didier MISSENAARD  
M. Denis JULIOT  
M. Xavier GABILLY  
M. Nicolas BURQ

Chercheur :  
M. Vincent BRAULT

### Introduction

Un paysan doit livrer sa récolte de blé (90 sacs) au marché de la ville voisine, distante de 50 km. Pour cela, il fait appel à un charretier. La charrette de celui-ci peut transporter 50 sacs. Le charretier demande comme salaire un sac de blé pour chaque kilomètre parcouru à l'aller ! Heureusement, il ne demande rien pour le trajet retour.

Combien le paysan va-t-il pouvoir apporter de sacs au marché ?

Dans un premier temps nous verrons trois méthodes possibles et laquelle est la plus efficace. Dans un second temps nous verrons comment évolue le nombre de sacs apportés au marché lorsque le nombre de paysans augmente.

### I. Réponse au problème posé

#### 1 ) La première solution

La première méthode qui vient à l'esprit est de remplir la charrette avec 50 sacs et d'effectuer un premier trajet de 50 km. Le

paysan paye 50 sacs au charretier. Il retourne au village et met les 40 sacs restants dans la charrette. Le paysan fait un deuxième trajet mais au bout de 40 km celui-ci n'a plus de sacs. Il n'a donc pas amené le moindre sac à la ville.

#### 2 ) La deuxième solution

Le paysan remplit la charrette avec 50 sacs et parcourt 20 km. Le paysan dépose les 30 sacs qui lui restent et retourne à la ville. Durant le trajet retour il ne paye pas de sacs. Arrivé à la ville, le paysan met dans la charrette les 40 sacs restants. Il parcourt à nouveau 20 km. Il reste donc  $40 - 20 + 30 = 50$  sacs. Le paysan parcourt les 30 km restants jusqu'à la ville et paye 30 sacs au charretier. Il nous reste donc  $50 - 30 = 20$  sacs.

Faire l'étape ( moment où le paysan dépose ses sacs ) au vingtième kilomètre est optimal car avant il reste plus de deux charrettes et après le paysan aura un nombre moins important de sacs à chaque kilomètre ( avec l'étape au kilomètre 21 il ne lui reste que 19 sacs à l'arrivée, 18 au kilomètre 22 etc... ) (1)

Nous remarquons donc qu'il est possible de ramener des sacs à la ville.

#### 3 ) La troisième solution

Le paysan paye en avance 50 sacs au charretier qui nous permettent de transporter une charrette sur 50 km. Le paysan charge ladite charrette et il parcourt les 50 km qui le séparent de la ville. Ayant déjà payé le charretier, il lui reste 40 sacs à l'arrivée. Cette méthode est plus efficace car le paysan ne déplace pas les sacs à payer au charretier, il ne paye pas par conséquent pour le transport de ces derniers.

Nous remarquons donc que la troisième méthode est plus efficace que la première qui ne permet pas d'apporter le moindre sac au marché, quel que soit ce nombre de sacs et que la seconde. Le paysan peut donc apporter jusqu'à 50 sacs au marché. (2)

Mais ceci se vérifie-t-il pour un nombre de sacs plus important ?

## II. Travaux complémentaires

(3)

### 1) La seconde méthode

#### a) Définitions

Si on a 990 sacs, il nous faudra 20 charrettes car  $990 / 50 = 19,8$ . On ne peut avoir des morceaux de charrettes donc on arrondit à l'entier supérieur.

✓ Le nombre de charrettes  $n$  est l'arrondi à l'entier supérieur du nombre de sacs actuel divisé par 50.

Si au kilomètre 32 on a 354 sacs,  $n$  est égal à 8. Au kilomètre suivant (33) il ne nous reste que 346 sacs ( $354 - 8$ ) et  $n$  est égal à 7 : le kilomètre 33 est une étape.

✓ Une étape est le passage d'un nombre de charrettes  $n$  à un nombre de charrettes  $n'$  tel que  $n > n'$ .

On prend l'exemple de 4 paysans, on a donc 360 sacs.  $360/50=7,2$ . On a donc 8 charrettes. La première étape est au kilomètre 2. Il reste alors  $360-8*2=344$  sacs. On a donc 7 charrettes. La seconde étape est au kilomètre 9. Il reste

alors 295 sacs. On a donc 6 charrettes. La troisième étape est au kilomètre 17. Il reste alors 247 sacs. On a donc 5 charrettes. La quatrième étape est au kilomètre 27. Il reste alors 197 sacs. On a donc 4 charrettes. La cinquième étape est au kilomètre 39. Il reste alors 149 sacs. On a donc 3 charrettes.

Il reste donc 11 km. Il nous reste 116 sacs à la ville. Cela fait 29 sacs par paysan.

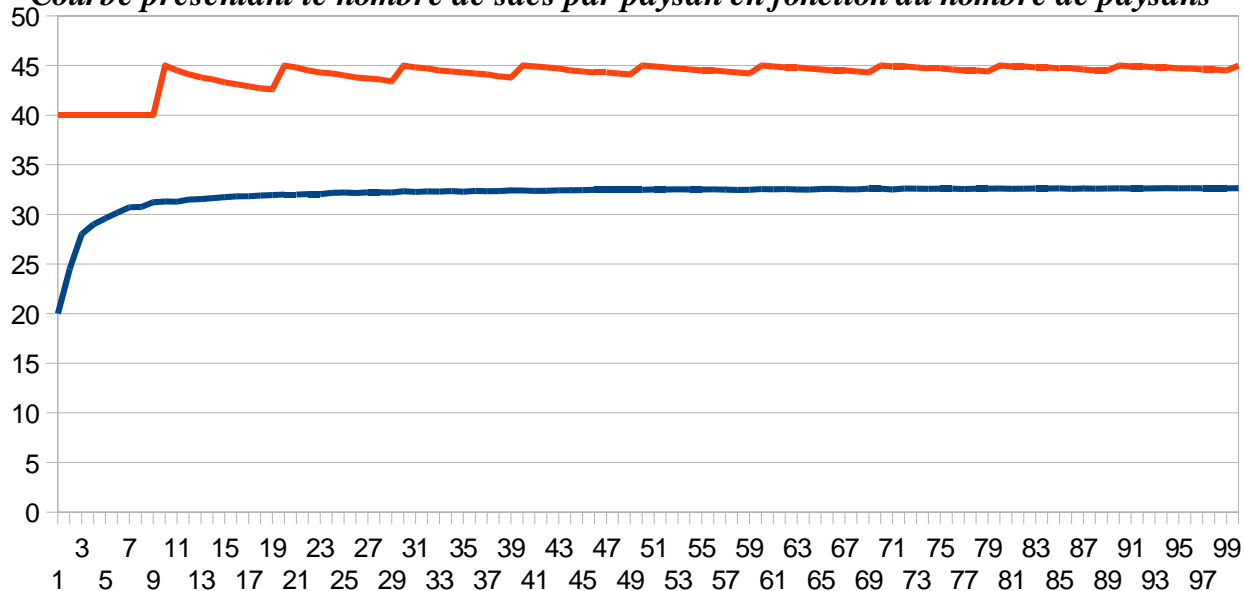
### 2) La troisième méthode

Pour 50 sacs (une charrette) transportés sur 50 km on paye 50 sacs. Donc dans le meilleur des cas pour 1 sac transporté à la ville, on paye un sac, soit 50% des sacs de départ. Si toutes les charrettes ne sont pas pleines, alors on paye plus d'un sac par sac transporté à la ville.

Pour connaître le nombre de sacs à payer au charretier on divise le nombre de sacs de départ par 2 et on arrondit le résultat à la cinquantaine supérieure si celui-ci n'est pas un multiple de 50 car on ne travaille qu'avec des charrettes entières.

Ainsi pour 360 sacs on a :  
 $360/2=180$   
 • 180 n'est pas un multiple de cinquante  
 • On paye 200 sacs au charretier

*Courbe présentant le nombre de sacs par paysan en fonction du nombre de paysans*



- Il reste 160 sacs à l'arrivée ce qui fait 40 sacs par paysan.

## Conclusion

Ainsi, nous constatons que la première méthode est totalement inefficace. La deuxième méthode permet de ramener des

— 2ème méthode  
— 3ème méthode

sacs à l'arrivée. En optimisant cette méthode, on obtient un nombre de sacs à l'arrivée par paysan qui augmente plus les paysans sont nombreux, mais on ne dépasse pas trente cinq sacs par paysans sur l'intervalle étudié.

La troisième méthode est de loin la plus efficace. Elle permet de ramener bien plus de sacs que les autres méthodes, quel que soit le nombre de paysans. Cependant, même avec cette méthode, on ne dépasse pas quarante cinq sacs par paysans, soit un sac pour deux, ce qui est logique car on paye cinquante sacs par trajet de cinquante kilomètres et que l'on ramène cinquante sacs maximum par trajet. (4)

## Notes de l'édition

(1) Avec un peu de calculs, on peut trouver que le nombre de sacs à l'arrivée si on fait l'étape au kilomètre  $k$  est égal à  $40-k$  (si  $k \geq 20$ ). Ceci dit, les auteurs n'expliquent pas pourquoi l'on ne pourrait pas faire mieux avec deux, trois ou plus d'étapes.

(2) Il peut apporter 50 sacs, s'il dispose de 100 sacs au départ, sinon c'est bien 40 sacs. Les auteurs expliqueront à la page suivante pourquoi l'on ne peut pas faire mieux...

(3) Dans cette partie, il y a plusieurs paysans et tous possèdent 90 sacs.

(4) Ne pourrait-on pas imaginer une méthode qui mixte la deuxième et la troisième méthode : c'est-à-dire en faisant des étapes mais en payant en avance les sacs ? Cela améliore certainement ce qui est obtenu avec la deuxième méthode, et peut-être ce qui est obtenu avec la troisième ?

Une extension naturelle est de considérer un nombre différent de sacs au départ