

PROBLEME DE BILLARD

**Comment lancer une boule de billard pour
qu'elle revienne à sa position de départ après
9 bandes ?
Après n bandes ?**

Lycée Ozenne de Toulouse :

Marion ARNAUD, Céline CAUBERE, Emmanuelle MOINIER, Sandrine BOUJON,
Priscilla TOUTET, Pierre POMERET et Faouzi BOULFETAT.

Lycée Pierre-Paul Riquet de Saint Orens :

Franck BARITAUD, Thomas BATAILLE, Serge LACOURT, Matthieu SAUCEDE,
Jérémy VARENNES, Emmanuelle HUERTAS-CAMPOS, Bastien RENAUT,
Josselin PREVOST

2004

SOMMAIRE

Préambule

- 1. Les figures simples** p 3

- 2. L'univers de travail** p 4 et 5
 - 2.1.** Le rebond dans le coin
 - 2.2.** Un premier théorème
 - 2.3.** Des outils pour la démonstration
 - 2.4.** La démonstration

- 3. Une figure qui marche** p 6
 - 3.1.** La figure
 - 3.2.** Sa démonstration
 - 3.3.** Les autres pistes

- 4. Billard à 6 bandes avec un angle de 45°** p 7 à 9
 - 4.1.** Une constatation
 - 4.2.** La preuve
 - 4.3.** Régularité entre les parallèles ?

- 5. Un problème de lieu** p 10 à 12
 - 5.1.** Spécificités du sujet
 - 5.2.** Les zones de départ
 - 5.3.** Les lieux de départ
 - 5.4.** Recherche de l'équation de la courbe

PREAMBULE

Le sujet proposé est celui qui est énoncé dans le titre. Cependant, chacun des quatre groupes se l'est approprié de différentes façons et ce document est un essai de synthèse des différents travaux effectués

La question initiale était de savoir dans combien de directions nous pouvons envoyer une boule de billard de manière à ce qu'elle revienne en son point de départ après n bandes.

Nous avons un peu modifié la question en choisissant de nous intéresser à plusieurs valeurs de n croissantes en commençant par les plus simples.

1. Les figures simples : une ou deux bandes

On tire la boule n'importe où à l'intérieur du billard, sur une horizontale, figure 1, sur une verticale, figure 2 ou sur les diagonales, figure 3, et après une bande, elle revient à sa position initiale :

Ce sont les seuls cas

Figure 1 :

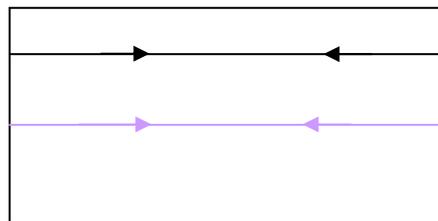


Figure 2 :

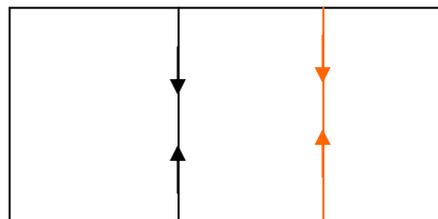
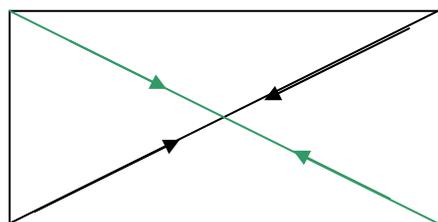


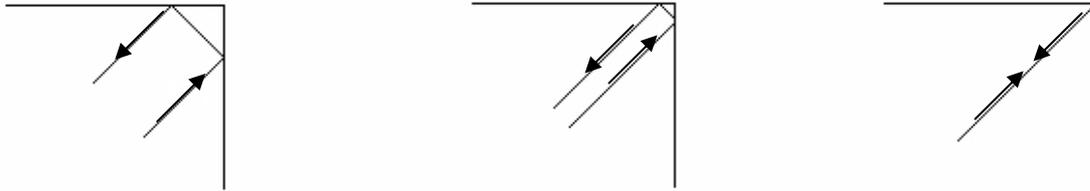
Figure 3 :



2. L'univers de travail

2.1 le rebond dans un coin

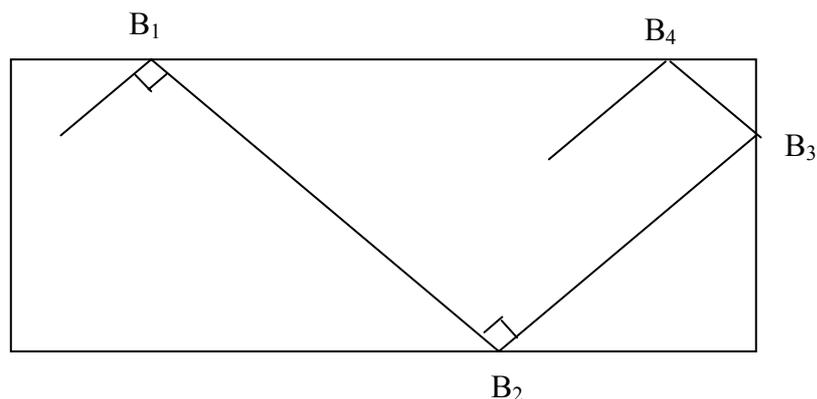
Lorsque la bille frappe dans un coin (cas de la figure 3), il y a un problème, à savoir : devons nous considérer que la bille tape une seule bande ou deux bandes ? Etudions le cas.



Lorsqu'une bille de billard frappe un angle, elle revient au même endroit, taper l'angle semblerait compter 2 bandes. Nous considérerons au cours de notre étude que taper un angle revient à taper 2 bandes.

2.2 Un premier théorème

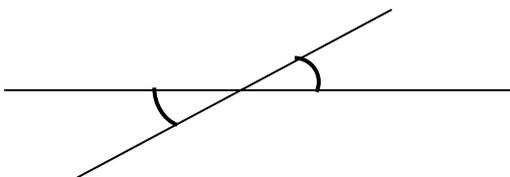
Nous allons maintenant chercher à savoir si dans le cas de la figure ci-dessous (B_1B_2) est toujours parallèle à (B_3B_4) quelle que soit la figure.



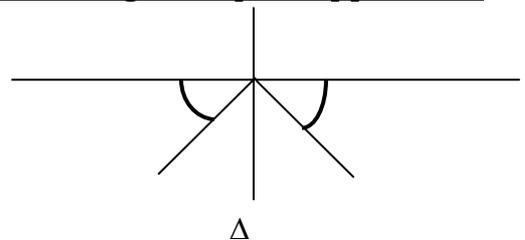
2.3 Des outils pour la démonstration

Rappel : nous avons des égalités d'angles dans les figures qui suivent:

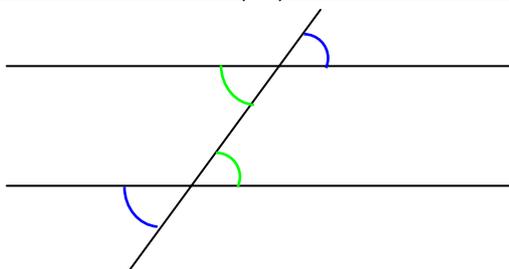
Angles opposés par le sommet :



Symétrie orthogonale par rapport à Δ :



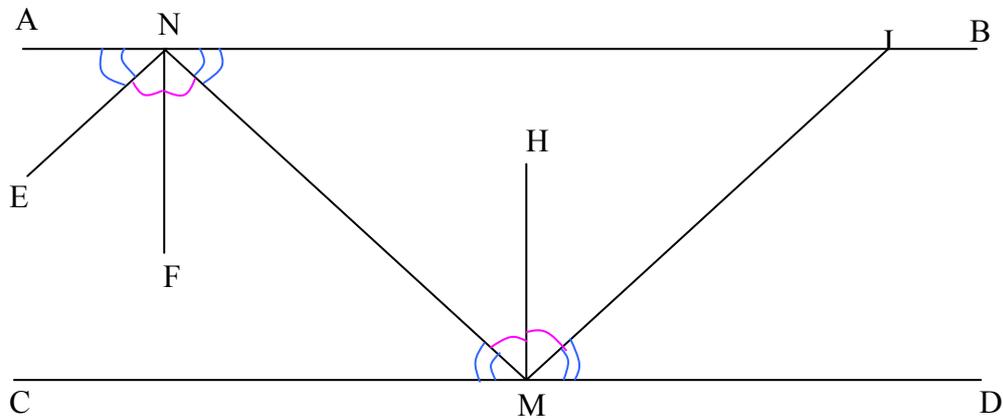
Angles alternes-internes (—) et alternes-externes (—) :



2.4 La démonstration du théorème

Il existe deux cas de figure : ou bien les deux premières bandes sont sur deux côtés opposés ou bien elles sont sur deux côtés adjacents.

1er cas : les 2 bandes s'effectuent sur deux côtés opposés
(NF) perpendiculaire à (AB)



Par la symétrie d'axe (NF)
 $\widehat{ENF} = \widehat{FNM}$ et $\widehat{ANE} = \widehat{BNM}$

D'après les propriétés des angles alternes internes, on en déduit que $\widehat{INM} = \widehat{NMC}$
Par symétries $\widehat{ANE} = \widehat{INM}$ et $\widehat{NMC} = \widehat{IMD}$.

Donc $\widehat{ANE} = \widehat{IMD}$; comme les deux angles sont en position d'angles alternes-externes, on a bien $(NE) \parallel (IM)$

2ème cas : deux bandes sur deux côtés adjacents

MNB et MKN sont deux triangles rectangles respectivement en B et K

De plus par symétrie d'axe (MK), $\widehat{CMK} =$

$$\widehat{KMN} = 90 - \beta$$

$$\widehat{AMC} = \widehat{NMB} = \beta$$

$(MK) \parallel (BN)$, et la droite (MN) est sécante aux deux droites

donc $\widehat{KMN} = \widehat{MNB} = 90 - \beta$ (angles alternes internes)

$$\widehat{MNB} = \widehat{XNE} = 90 - \beta$$

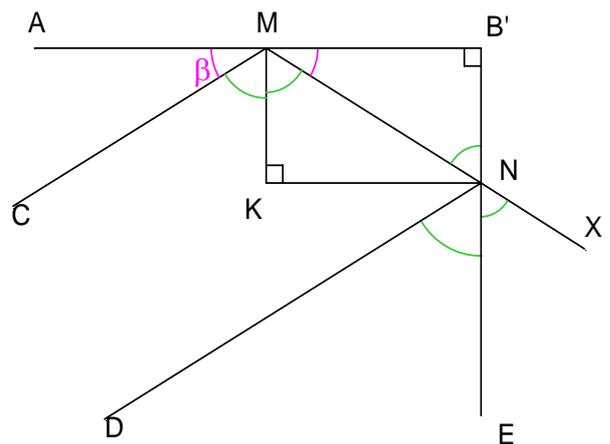
car les angles sont opposés par le sommet.

Par symétrie d'axe (BE)

$$\widehat{XNE} = \widehat{END} = \beta$$

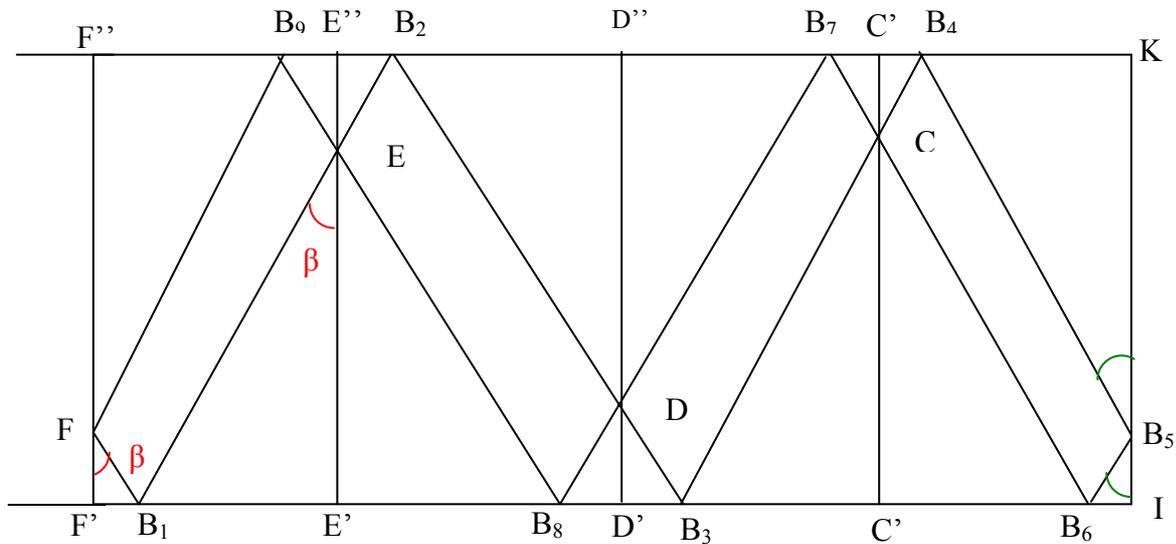
On conclut que $\widehat{CMN} = \widehat{DNX} = 2 \times \beta$

Comme ce sont des angles correspondants, on a donc $(CM) \parallel (DN)$



3. Une figure qui marche

3.1 La figure



La boule est placée en un point F quelconque

On va chercher s'il existe un angle β pour lequel la boule effectue 9 rebonds dont un seul sur le côté vertical, le cinquième, et qu'elle revienne à son point de départ.

3.2 Sa démonstration

Nous démontré que quelquesoit la position du point F de départ, il existe un angle β qui permet de revenir au point de départ : $\tan \beta = \frac{1}{4} \frac{F'I}{F'F''}$

Nous n'avons pas réussi à rédiger cette démonstration assez rigoureusement et comme elle était très longue, nous vous épargnerons les détails. Sachez seulement qu'elle est basée sur les symétries d'axes (C'C''), (D'D'') et (E'E'').

3.3 Les autres pistes

Nous avons aussi chercher à l'aide des équations de droites mais notre recherche a abouti, dès l'équation du 4ème rebond, à un grand nombre d'équations.

Malgré tout, nous avons pu remarquer qu'un certain nombre d'équations se répétaient à plusieurs reprises, nous avons abandonné cette voie par manque de temps.

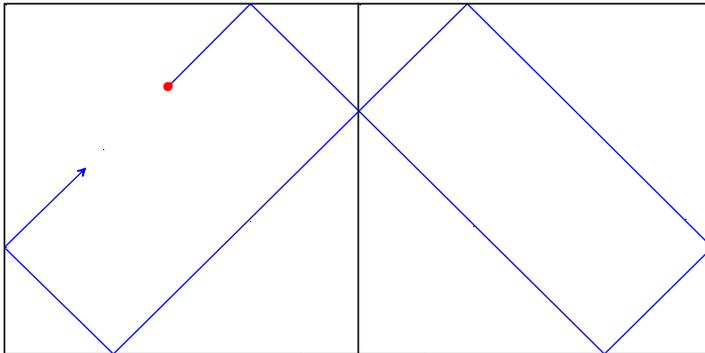
(voir annexe)

4. Billard à 6 bandes avec un angle de 45°

4.1 Une constatation

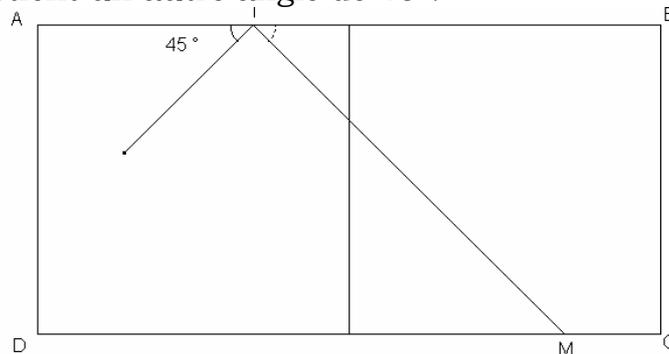
Dans cette nouvelle approche du problème, nous avons utilisé les proportions d'un vrai billard, c'est à dire que la longueur est le double de la largeur.

On se fixe un angle de départ de 45° et une position de départ quelconque. Nous remarquons que, dans ce cas, la balle semble revenir à son point de départ, avec la même direction et après 6 rebonds.



4.2 la preuve

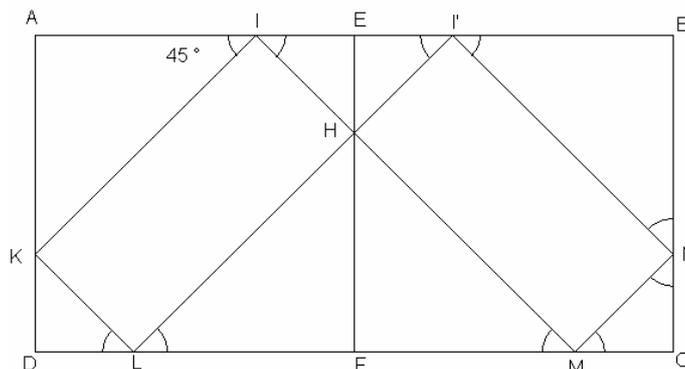
Par réflexion, on obtient un autre angle de 45°.



L'angle \widehat{BIM} est de 45°. Or dans le billard qui est un rectangle, il y a 2 droites parallèles : (AB) et (DM)

Donc, par la propriété des angles alternes-internes, on a : $\widehat{BIM} = \widehat{IMD} = 45^\circ$

Par réflexions successives, on obtient des angles de 45° et des triangles isocèles.



Puisqu'on a des triangles isocèles, on a des longueurs égales.

$$AI = AK$$

$$IE = EH$$

$$\text{Et } HF = FL$$

Or comme on est dans un rectangle composé de deux carrés :

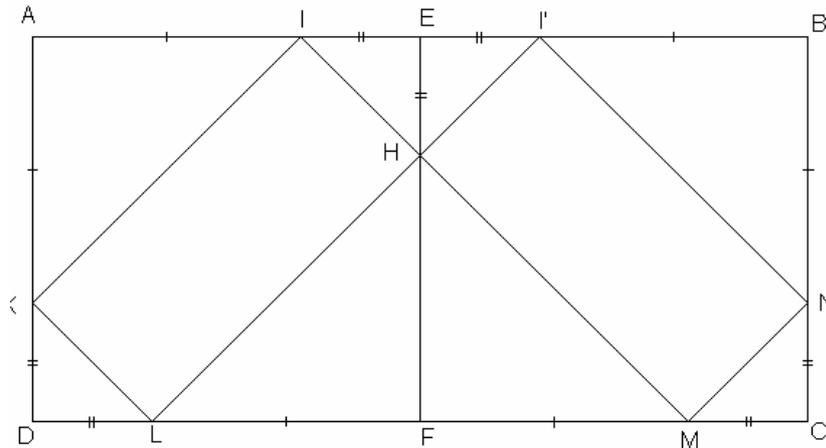
$$AE = EF$$

$$AI = AE - IE$$

$$HF = EF - EH$$

$$\text{Donc } AI = HF$$

De même pour tous les segments suivants codés sur la figure :



$$IE = EI'$$

Donc I est le symétrique de I' par rapport à [EF].

$$LF = FM$$

Donc L est le symétrique de M par rapport à [EF]

$$DF = FC \quad (\text{car } ABCD \text{ est constitué de deux carrés égaux})$$

Donc D est le symétrique de C par rapport à [EF]

K est placé sur le segment [AD]

Donc son symétrique est placé sur le segment [BC] qui est, lui, le symétrique de [AD]

$$\text{Or } DK = CN$$

Donc K est le symétrique de N par rapport à [EF]

Par conséquent on a un axe de symétrie : [EF]

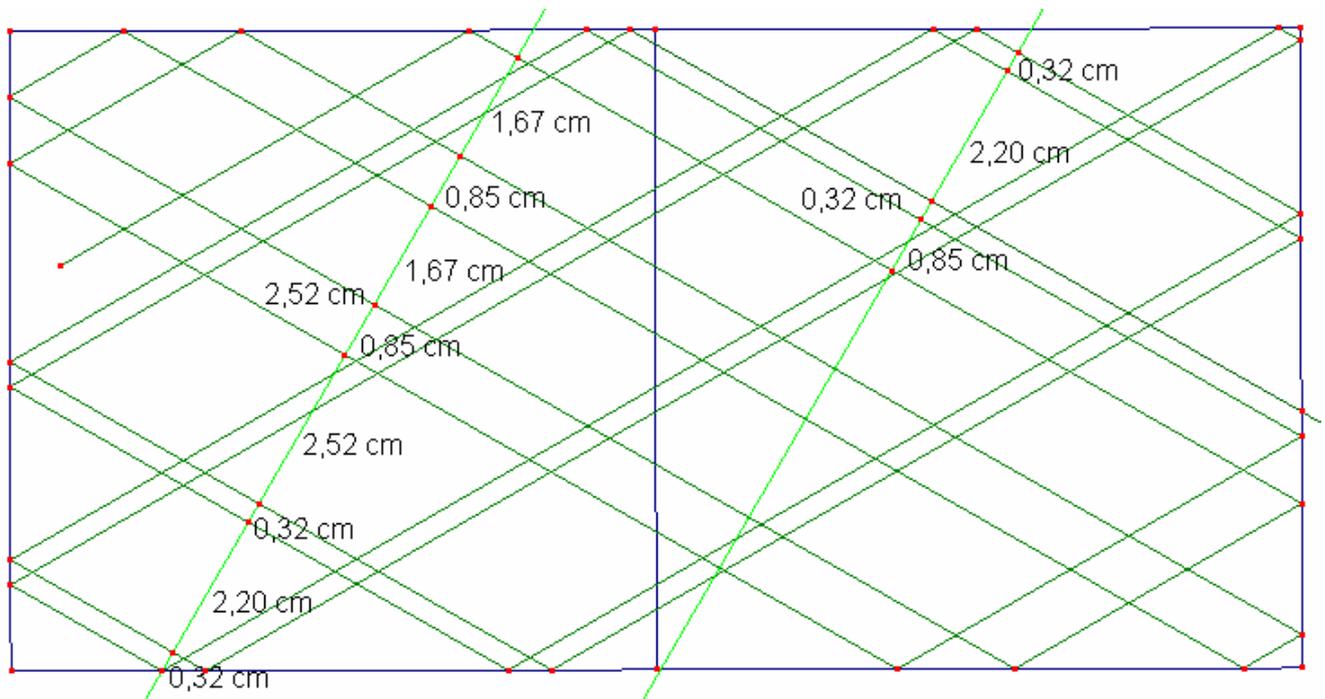
Le quadrilatère HI'MN est un rectangle car il y a 3 angles droits (voir figure 2)

Par symétrie, le quadrilatère IHLK est aussi un rectangle. Donc **la balle repasse par le même point dans la même direction.**

4.3 Régularité entre les parallèles ?

Après avoir fait la figure avec l'angle de départ à 45° , nous avons constaté qu'il y avait un axe de symétrie.

En réalisant cette figure (voir ci-dessous), nous voulions savoir si l'axe de symétrie était conservé dans le cas général.



Après avoir simulé un grand nombre de rebonds sur CABRI, nous avons abandonné cette idée puisque nous ne parvenions pas à revenir au point de départ en repassant dans la même direction (car nous avons toujours voulu que les droites repassent par le même point dans la même direction et le même sens).

Cependant, il nous semblait y avoir une certaine régularité de distance entre les droites. Toujours grâce au logiciel CABRI, nous avons mesuré la distance entre les droites et ces mesures, que nous reproduisons partiellement ici, nous ont confortés dans notre idée.

Malheureusement, nous n'avons pas eu le temps de continuer à chercher dans cette direction....

5. Un problème de lieu

5.1 Spécificités du sujet

Nous avons tout d'abord déterminé de quelles zones la boule peut partir pour revenir à son point de départ en trois bandes, la première bande s'effectuant au milieu d'un petit côté.

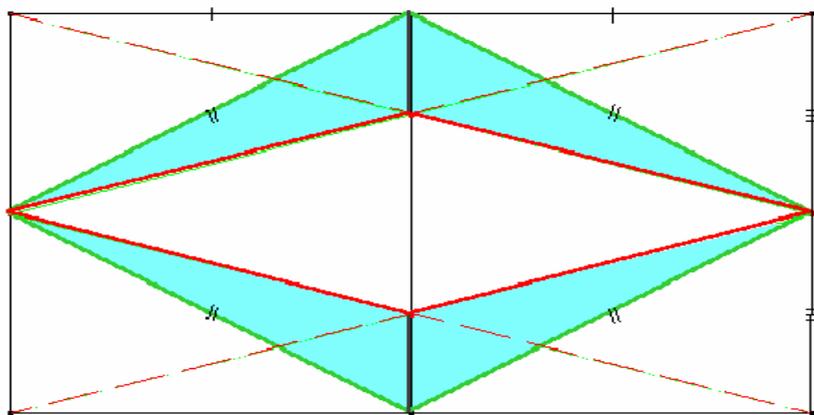
Nous avons utilisé les proportions réelles d'un billard : la longueur doit être le double de la largeur.

Nous avons constaté que,

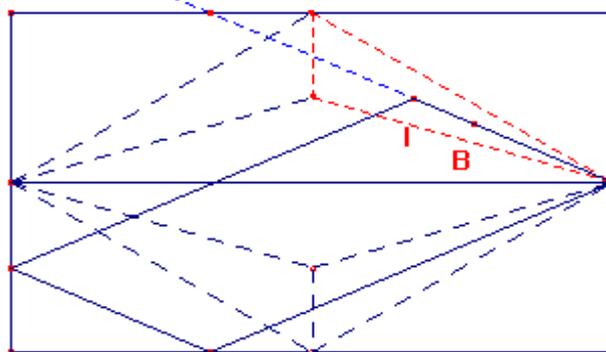
- Si la boule part du milieu d'un des bords en direction du milieu d'un bord adjacent, elle revient à son point de départ après 3 bandes.
- Pour une direction intermédiaire elle recoupe sa trajectoire à l'intérieur du billard
- Pour les autres directions de départ, la trajectoire se recouperait en dehors du billard.

5.2 Les zones de départ

Nous avons donc déterminé expérimentalement quatre zones comme l'indique la figure ci-dessous.

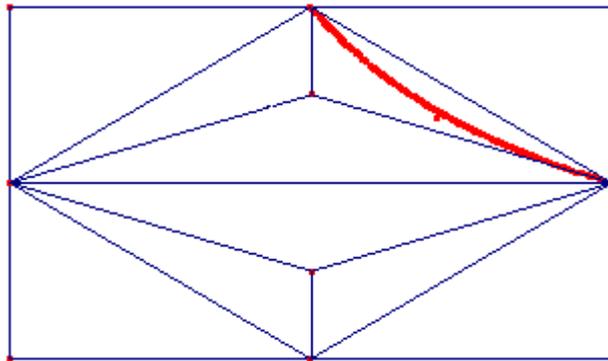


Admettons que l'on mette la boule en un point B dans une des quatre zones, et qu'on la fasse rebondir sur le milieu de la largeur la plus proche. Après 3 rebonds, la boule recoupe la première partie de la trajectoire dans la même zone en un point que nous appellerons I.



5.3 Des lieux de départ possible

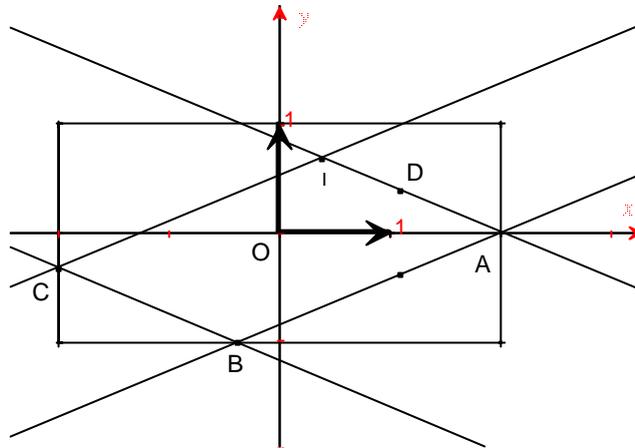
Grâce au logiciel Cabri et sa fonction "trace", nous avons ensuite simulé des lancers en partant de la zone en haut à droite et en faisant apparaître la trace de I. On obtient ainsi la courbe représentant l'ensemble des points pour lesquels la boule revient à son point de départ dans les conditions énoncées.



5.4 Recherche de l'équation de la courbe

Nous sommes partis sur l'idée que nous pouvons représenter cette courbe dans un repère orthonormé, ainsi, nous avons cherché l'équation de cette courbe.

Prenons un billard de dimension 2 sur 4, le centre du repère au centre du billard, et un repère orthonormé d'axes parallèles aux côtés du billard.



Notons (a,b) les coordonnées du point D de départ (a différent de 2), et déterminons l'équation des quatre premières droites qui composent la trajectoire.

1^{ère} droite:

Elle passe par les 2 points $D(a;b)$ et $A(2;0)$.

Elle a donc pour équation : $(a-2)y + 2b = bx$

2^{ème} droite:

Elle est la symétrique de la première par rapport à l'axe des abscisses, elle a donc pour équation: $(a-2)y - 2b = -bx$

Le deuxième rebond a lieu à un point B d'ordonnée égale à -1 . L'abscisse de B est

donc égale à $2 - \frac{2-a}{b}$

3^{ème} droite:

Elle est parallèle à la 1^{ère}, elle a donc une équation du type : $(a-2)y + c = bx$

Elle passe par le points B $(2 - \frac{2-a}{b}; -1)$. Ainsi : $c = 2(a+b-2)$.

Le troisième rebond a lieu à un point C d'abscisse égale à -2. L'ordonnée de C est donc égale à $2 \frac{2-a-2b}{a-2}$.

4^{ème} droite:

Elle est parallèle à la 2^{ème}, elle a donc une équation du type : $(a-2)y + d = -bx$

Elle passe par le point C $(-2; 2 \frac{2-a-2b}{a-2})$. Ainsi : $d = 2(3b+a-2)$.

Coordonnées de I, point d'intersection de la 1^{ère} et de la 4^{ème} droite :

Les coordonnées de I vérifient le système :

$$\begin{cases} (a-2)y + 2b = bx \\ (a-2)y + 2(3b+a-2) = -bx \end{cases}$$

On obtient alors

$$y_I = -1 + \frac{4b}{2-a} \quad \text{et} \quad x_I = -2 + \frac{2-a}{b}$$

Équation de la courbe :

Le point I se trouve donc sur l'hyperbole d'équation : $y = -1 + \frac{4}{x+2}$

(On vérifie que les milieux des côtés du haut et de droite y sont)

Puis par symétries, on obtient pour les 3 autres zones :

A droite en bas : $y = 1 - \frac{4}{x+2}$

A gauche en bas : $y = 1 - \frac{4}{-x+2}$

A gauche en haut: $y = -1 - \frac{4}{-x+2}$

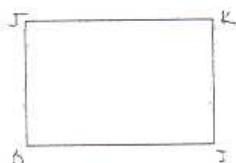
ANNEXE

Essai de résolution par des équations de droite.

Soit un repère orthogonal (O, \vec{i}, \vec{j}) tel que $O I K J$ soit la table de billard

La trajectoire initiale est $y_1 = ax + b$

On créera quatre « fonctions », qui associent à une équation de type $y_n = mx + p$:



- Si B_n appartient à]JO[$\Rightarrow B_n(0; p) \Rightarrow y_{n+1} = -mx + p$
- Si B_n appartient à]JK[$\Rightarrow B_n((1-p)/m; 1) \Rightarrow y_{n+1} = -mx + 2 - b$
- Si B_n appartient à]JK[$\Rightarrow B_n(1; m+p) \Rightarrow y_{n+1} = -mx + 2m + p$
- Si B_n appartient à]OI[$\Rightarrow B_n(-p/m; 0) \Rightarrow y_{n+1} = -mx - p$

En n'oubliant pas que, bien sur, deux rebonds consécutifs sur le même côté est impossible !

Notation : MN signifie << un rebond sur]MN[>>

MN / OP signifie << un rebond sur]MN[puis sur]OP[ou sur]OP[puis sur]MN[>>

JO / JK	JK / KI	KI / OI	OI / JO
$y_3 = ax + 2 - b$	$y_3 = ax - 2a - b + 2$	$y_3 = ax - 2a - b$	$y_3 = ax - b$

JO puis KI	KI puis JO	JK puis OI	OI puis JK
$y_3 = ax - 2a + b$	$y_3 = ax - 2a - b$	$y_3 = ax - 2 + b$	$y_3 = ax + 2 + b$

Généralement, on constate que si la balle, qui a pour trajectoire y_n s'en va rebondir sur deux bandes adjacentes, peu importe l'ordre dans lequel elle les touche, on obtiendra la même trajectoire y_{n+2} .

On créera huit « fonctions » qui associent à toutes equation de type $y_n = mx + p$ une autre de type $y_{n+2} = \dots$ suivant les résultats trouvés.

On peut alors trouver :

JO / JK puis KI / IO
 $y_5 = ax - 2a - 2 + b$

KI / IO puis JO / KI
 $y_5 = ax + 2 + 2a + b$

JO / OI puis JK / KI
 $y_5 = ax - 2a + 2 + b$

JK / KI puis JO / OI
 $y_5 = ax + 2a - 2 + b$

KI puis JO puis KI puis JO
 $y_5 = ax + 4a + b$

JO puis KI puis JO puis KI
 $y_5 = ax - 4a + b$

OI puis JK puis OI puis JK
 $y_5 = ax + 4 + b$

JK puis OI puis JK puis OI
 $y_5 = ax + 4 - b$

(JK / KI) / (JO puis KI)
 $y_5 = ax - 4a + 2 - b$

(JK / KI) / (OI puis JK)
 $y_5 = ax + 4 - 2a - b$

(JO / OI) / (JK puis OI)
 $y_5 = ax - 2 - b$

(JO / OI) / (KI puis JO)
 $y_5 = ax + 2a - b$

(JO / JK) / (OI puis JK)
 $y_5 = ax + 4 - b$

(JO / JK) / (KI puis JO)
 $y_5 = ax + 2a + 2 - b$

(KI / IO) / (JO puis KI)
 $y_5 = ax - 4a - b$

(KI / IO) / (JK puis OI)
 $y_5 = ax - 2 - 2a - b$

Cette méthode s'avérant assez longue, car les calculs simples à répétitions entraînent souvent des erreurs, que le nombre de cas possible est déjà de 16 avant le 5^{ème} rebond, et parce qu'aucune issue ne se laissait apercevoir, nous avons décider de laisser-là notre méthode par équation de droite, et de s'en remettre à une science bien plus traditionnelle, la géométrie.