Du café ou du chocolat ?

Année 2015 - 2016

Clara WU, élève de 6$^{\text{ème}}$

Aleyna BOROCKU, Lyla DEMANGE, Juliette ROBERT, Zoé SCHWANN, élèves de 5$^{\text{ème}}$

Encadrées par Mme HIRIART et M FINDIK

Etablissement : Collège George CHEPFER, Villers-lès-Nancy

Chercheuse : Irène MARCOVICI, Institut Elie Cartan, Université de Lorraine

Présentation du sujet

1°) Tous les matins, au petit déjeuner, nous avons le choix entre du **café** et du **chocolat**.
Pour rompre toute monotonie, on se demande s'il est possible de faire ce choix sans que jamais dans une suite de « café-chocolat-etc. . », une même séquence ne se répète **trois fois de suite** côte à côte ?
Sur une semaine, le choix est facile ! Par exemple la suite « café-chocolat-chocolat-café-chocolat-café-café » convient.
Mais peut-on trouver une suite de « café-chocolat- etc.» qui convienne jusqu'à la fin de nos jours ? Et pour un nombre infini de jours, est-ce encore possible ?

2°) Et si on rajoute du **thé** ?
Est-il possible de faire un choix sans que jamais la même séquence ne se répète **deux fois de suite** côte à côte ?

Sommaire :
1°) Etude de mots : alphabet, carré, cube.
2°) Mots dont l'alphabet ne contient que deux symboles : 0 et 1.
  a) Mots sans carré.
  b) Mot de longueur infinie sans cube.
  c) Illustration géométrique à l'aide de GeoTortue.
  d) Réponse à la première question du problème.
3°) Mots dont l'alphabet ne contient que trois symboles : 0, 1 et 2.
  a) Mots sans carré.
  b) Mot de longueur infinie sans carré.
  c) Réponse à la deuxième question du problème.

Résultats :
Nous avons trouvé une suite de « café-chocolat- etc.» qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, **sans aucune répétition d'une séquence trois fois de suite côte à côte**. Et de même, nous avons trouvé une suite de « café-chocolat-thé- etc.» qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, **sans aucune répétition d'une séquence deux fois de suite côte à côte.**

1°) Etude de mots

▪ **Ils sont construits avec des alphabets** de différents symboles dont le nombre est limité.
exemple : notre alphabet est constitué de 26 symboles : les 26 lettres a, b, c, d, …, x, y, z.

▪ **On veut éviter les répétitions côte à côte.**
Par exemple avec notre alphabet de 26 lettres :
- le mot *rou**doudou*** contient la répétition côte à côte de ***dou**,* on dira qu'il contient **un carré**.
- le mot ***coco**rico* contient la répétition côte à côte de ***co**,* il possède un seul carré, même si *co* est présent 3 fois.
- le mot *abracadabra* ne contient aucun carré.
- le mot *tra**lalala**lère* contient 3 fois de suite ***la*** côte à côte, on dira qu'il contient **un cube**.

Pour résoudre notre problème, on va étudier des mots écrits avec un alphabet ne contenant que deux symboles : les chiffres 0 et 1, puis trois symboles : les chiffres 0, 1 et 2.

2°) Mots donc l'alphabet ne contient que les deux chiffres 0 et 1

a) Mots sans carré

Avec deux chiffres seulement, il est difficile de ne pas avoir de répétition de séquence côte à côte deux fois de suite, c'est-à-dire de ne pas avoir de carré.

0 - 1 - 01 - 10 - 010 - 101 sont les seuls mots sans carré, ils n'ont pas plus de 3 chiffres.

Avec 4 chiffres ou plus, il ne peut pas y avoir de mot sans carré :
On prend les deux mots de 3 chiffres sans carré 010 et 101 et on rajoute un chiffre 0 ou 1.
-si le mot commence par 010, soit on écrit 0 ensuite, on obtient le mot 0100 et donc le carré 00.
soit on écrit 1 ensuite, on obtient le mot 0101 et donc le carré de 01.
-si le mot commence par 101, soit on écrit 0 ensuite, on obtient le mot 1010 et donc le carré de 10.
soit on écrit 1 ensuite, on obtient le mot 1011 et donc le carré 11.

Ainsi pour notre problème, si 0 représente le choix d'un café et 1 celui d'un chocolat, pour le petit déjeuner, il y aura donc au plus tard le 4ème jour une même séquence de «chocolat-café-etc. » qui se répètera deux fois de suite.

Les quatre séquences ci-dessous contiennent toutes une répétition côte à côte deux fois de suite.
« Café – Chocolat – **Café** – **Café** », « **Café – Chocolat** – **Café – Chocolat** »,
« **Chocolat – Café** – **Chocolat – Café** », « Chocolat – Café – **Chocolat** – **Chocolat** »

Comme il n'existe pas de mot de longueur supérieure ou égale à 4 sans carré, nous cherchons des mots de plus de 4 chiffres 0 ou 1 sans cube.

b) Mot de longueur infinie sans cube

0101001100101101001101001010011010010110 est par exemple un mot de 40 chiffres sans cube et cela devient difficile de l'allonger en étant sûr qu'il n'y a pas de cube.
(On verra plus loin comment on s'est assuré que ce mot ne contient pas de cube.)

Notre chercheuse nous a alors donné un mot constitué de 0 et 1et de longueur aussi longue que l'on veut.
Nous devons démontrer qu'il ne possède aucun cube pour résoudre notre problème.

Ce mot se construit par substitution, en remplaçant **0** par **01** et **1** par **10**.

On démarre de 0 **0**
rang1 **0** **1** mot de longueur 2
rang 2 **0** **1** **1** **0** mot de longueur 4 = 2^2
rang 3 **0** **1** **1** **0** **1** **0** **0** **1** mot de longueur 8 = 2^3
rang 4 **0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0** mot de longueur 16 = 2^4
rang 5 **01101001100101101001011001101001** mot de longueur 32 = 2^5

et on continue ainsi de suite indéfiniment.

Remarques :
▪ Si on démarre par 1 c'est pareil, sauf que les 1 et 0 sont inversés.
▪ A chaque nouveau rang, la longueur du mot double puisque chaque chiffre 0 ou 1 est remplacé par deux chiffres 01 ou 10.
▪ On a remarqué que chaque mot est obtenu en prenant le mot de rang précédent et en lui accolant son « inverse » (même mot dont les 1 sont remplacés par des 0 et les 0 par des 1). Cela nous a aidés à construire plus facilement des mots de plus en plus longs.

Propriétés :
Par définition de la formation des mots :

▪ Nos mots ne sont constitués que par des séquences 01 et 10.

▪ Dans un mot d'un certain rang, en ne gardant que les chiffres en position paire on obtient le mot de rang précédent.
En effet par exemple, dans le mot de rang 5, en ne prenant que les chiffres en position paire (en orange), on obtient le mot précédent de rang 4.

rang 5 **0110100110010110 1001011001101001** **0**
rang 4 **0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0**

On va démontrer que **le mot de longueur infinie ainsi formé ne contient aucun cube.**

Démonstration :

► Ce mot ne peut contenir 000 ou 111
▪ Supposons qu'il contienne 000, alors le 1er 0 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage **---- / 00 / 0_ / ----**
→ S'il est en position impaire, on a le découpage **---- / _0 / 00 / ----**
or c'est impossible d'avoir une séquence / 00 / puisque nos mots ne sont constitués que des séquences 01 ou 10. Donc **ce mot ne contient pas 000**.

▪ Supposons qu'il contienne 111, alors le 1er 1 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage **---- / 11 / 1_ / ----**
→ S'il est en position impaire, on a le découpage **---- / _1 / 11 / ----**
or c'est impossible d'avoir une séquence / 11 / puisque nos mots ne sont constitués que des séquences 01 ou 10. Donc **ce mot ne contient pas 111**

► Ce mot ne peut contenir 010101 ou 101010
▪ Supposons qu'il contienne 010101, alors le 1er 0 est en position paire ou impaire.
→ S'il est en position paire, on a le découpage **---- / 01 / 01 / 01 / -----**
Le mot de rang précédent est alors formé des chiffres en position paire, il contient donc **0 0 0**
Or, on a vu que c'est impossible.

→ S’il est en position impaire, on a le découpage **---- / _ 0 / 10 / 10 / 1 _ / ----**
Le mot de rang précédent, formé des chiffres en position paire, contient **1 1 1**
Or, on a vu que c’est impossible
Donc **ce mot ne contient pas 010101.**

▪ Supposons qu’il contienne 101010, alors le 1er 1 est en position paire ou impaire.
→ S’il est en position paire, on a le découpage **---- / 10 / 10 / 10 / -----**
Le mot de rang précédent est alors formé des chiffres en position paire, il contient donc **1 1 1**
Or, on a vu que c’est impossible.
→ S’il est en position impaire, on a le découpage **---- / _ 1 / 01 / 01 / 0 _ / ----**
Le mot de rang précédent, formé des chiffres en position paire, contient **0 0 0**
Or, on a vu que c’est impossible
Donc **ce mot ne contient pas 101010.**

► **Ce mot ne peut contenir 0a0a0 ou 1a1a1 où a est une même suite de 0 et 1**
La séquence a peut être de longueur paire ou de longueur impaire

- Supposons qu’il contienne 0a0a0 avec a de longueur paire.

▪ **Si a est de longueur 2**, on a selon que le 1er 0 est en position paire ou impaire, les découpages suivants :

---/ 0 _ / _ 0 / _ _ / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / _ _ / 0 _ / _ 0 /---**

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

---/ 0 1 / 1 0 / _ _ / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / _ _ / 0 1 / 1 0 /---**

Entre deux **0** du départ, la suite a est **11**. On la reporte à droite ou à gauche, on obtient :

---/ 0 1 / 1 0 / 1 1 / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / 1 1 / 0 1 / 1 0 /---**

Or, il est impossible d’avoir une séquence /11 / dans nos mots.

▪ **Si a est de longueur 4**, on a selon que le 1er 0 est en position paire ou impaire, les découpages suivants :

---/ 0 _ / _ _ / _ 0 / _ _ / _ _ / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / _ _ / _ _ / 0 _ / _ _ / _0 /---**

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

---/ 0 1 / _ _ / 1 0 / _ _ / _ _ / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / _ _ / _ _ / 0 1 / _ _ / 10 /---**

Entre deux **0** du départ, la suite a commence et se termine par **1**.
On reporte les 1 à droite ou à gauche, on obtient :

---/ 0 1 / _ _ / 1 0 / 1 _ / _ 1 / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / 1 _ / _ 1 / 0 1 / _ _ / 10 /---**

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes, on obtient :

---/ 0 1 / _ _ / 1 0 / 1 0 / 0 1 / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / 1 0 / 0 1 / 0 1 / _ _ / 10 /---**

Entre deux **0** du départ, la suite a est 1001 On la reporte à droite ou à gauche, on obtient :

---/ 0 1 / 0 0 / 1 0 / 1 0 / 0 1 / 0 _ /--- ou **--- _ 0 / 1 0 / 0 1 / 0 1 / 0 0 / 10 /---**

Or, il est impossible d’avoir une séquence /00 / dans nos mots.

▪ **Si a est de longueur paire supérieure ou égale à 6**

→ soit le 1er 0 est en position paire, et on a le découpage suivant :

--- / 0_ / _ _ / ------ / _ _ / _ 0 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 0 _ /---

même suite a de 0 et 1 de longueur paire.

On complète les séquences de 01 ou 10 incomplètes dans le découpage :
On a donc **--- / 01 / _ _ / ------ / _ _ / 1 0 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 0 1 / ---**
Comme entre les **0** du départ, il y a la même suite a de 0 et 1, on voit que la suite a commence et se termine par 1. On complète la suite a.
On a donc **--- / 01 / _ _ / ------ / _ _ / 1 0 / 1 _ / ------ / _ _ / _ 1 / 0 1 / ---**

On complète les séquences incomplètes.
On obtient --- / **01** / _ _ / ------ / _ _ / **1 0** / **1 0** / ------ / _ _ / **0 1** / **0 1** / ---
On voit que a se termine donc par 01. On complète la suite a.
On a donc --- / **01** / _ _ / ------ / _ **0** / **1 0** / **1 0** / ------ / _ _ / **0 1** / **0 1** / ---
On complète la séquence incomplète.
On obtient --- / **01** / _ _ / ------/ **1 0** / **1 0** / **10** / ------ / _ _ / **0 1** / **0 1** / ---
Le mot contient alors **101010.** Or on a vu que c'était impossible.

→ soit le 1[er] 0 est en position impaire, et on a le découpage suivant :

--- / _ 0 / _ _ / ----- / _ _ / _ _ / 0 _ / _ _ / ----- / _ _ / _ _ / _ 0 /---

même suite a de 0 et 1 de longueur paire.

On complète les séquences incomplètes au fur et à mesure comme précédemment.
On obtient pas à pas :

--- / 1 0 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 01 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 10 / ---
--- / 1 0 / 1 _ / ------ / _ _ / _ 1 / 01 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 10 / ---
--- / 1 0 / 1 0 / ------ / _ _ / 0 1 / 01 / _ _ / ------ / _ _ / _ _ / 10 / ---
--- / 1 0 / 1 0 / ------ / _ _ / 0 1 / 01 / 0 _ / ------ / _ _ / _ 0 / 10 / ---
--- / 1 0 / 10 / ------ / _ _ / 0 1 / 01 / 0 1 / ------ / _ _ / 1 0 / 10 / ---

Le mot contient alors **010101.** Or on a vu que c'était impossible.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 où a est une même suite de 0 et 1 de longueur paire.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 où a est une même suite de 0 et 1 de longueur paire.**

- Supposons qu'il contienne 0a0a0 ou 1a1a1 avec a de longueur impaire.

▪ Si a est de longueur 1

Supposons que le mot contienne 0 _ 0 _ 0, on a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivant :
→ **---/ 0 _ / 0 _ / 0 ---** , alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **000**, or c'est impossible.
→ **---_ 0 / _ 0 / _ 0/---,** on complète les séquences incomplètes, on obtient **---1 0 / 1 0 / 1 0/---**, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **111**, or c'est impossible.
Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 1.**
On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 1**

▪ Si a est de longueur 3 (3 = 1×2 +1)

Supposons que le mot contienne **0 _ _ _ 0 _ _ _0**.

même suite a de longueur 3

On a alors selon que **0** soit en position paire ou impaire, les découpages suivant :
→ **---/ 0 _ / _ _ / 0 _ / _ _ / 0---** , alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **0 _ 0 _ 0**. Or on vient de voir que c'est impossible.
→ **---_ 0 / _ _ / _ 0 / _ _ / _ 0/---,** on complète les séquences incomplètes, on obtient **---1 0 / _ _ / 1 0 / _ _ / 1 0/---**, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **1 _ 1 _ 1**, or on vient de voir que c'est impossible.
Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 3.**
On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 3.**

▪ **Si a est de longueur 5** (5 = 2×2 +1)

Supposons que le mot contienne 0 _ _ _ _ _ 0 _ _ _ _ _ 0.

même suite a de longueur 5

On a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivant :

→ **---/ 0 _ / _ _ / _ _ / 0 _ / _ _ / _ _ / 0 ---** , alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **0 _ _ 0 _ _ 0**. Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas 0b0b0 où b est de longueur paire (2).

→ **---_ 0 / _ _ / _ _ / _ 0 / _ _ / _ _ / _ 0/---,** on complète les séquences incomplètes, soit
---1 0 / _ _ / _ _ / 1 0 / _ _ / _ _ / 1 0/---, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **1 _ _ 1 _ _ 1**. Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas 1b1b1 où b est de longueur paire (2).

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 5.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 5.**

▪ **Si a est de longueur 7** (5 = 3×2 +1)

Supposons que le mot contienne 0 _ _ _ _ _ _ _ 0 _ _ _ _ _ _ _ 0,

même suite a de longueur 5

On a alors selon que 0 soit en position paire ou impaire, les découpages suivant :

→ **---/ 0 _ / _ _ / _ _ / _ _ /0 _ / _ _ /_ _ / _ _ / 0 ---** , alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **0 _ _ _ 0_ _ _ 0**. Or c'est impossible car on a vu que notre mot ne contenait pas 0b0b0 où b est de longueur 3.

→ **---_ 0 / _ _ / _ _ / _ _ / _ 0 /_ _ / _ _ / _ _ / _ 0/---,** on complète les séquences incomplètes, on obtient
---1 0 / _ _ / _ _ / _ _ / 1 0 / _ _ / _ _ / _ _ / 1 0/---, alors le mot de rang précédent qui ne contient que les chiffres en position paire, contient **1 _ _ _ 1 _ _ _ 1**. Or c'est impossible car on a vu précédemment que notre mot ne contenait pas 1b1b1 où b est de longueur 3.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 avec a de longueur 7.**

On procède exactement de la même manière pour démontrer que **ce mot ne contient pas 1a1a1 avec a de longueur 7.**

▪ **Si a est de longueur 9** (9 = 4×2 +1)

Si les mots contiennent 0a0a0 ou 1a1a1 où a est de longueur 9, les mots de rang précédent contiennent 0b0b0 ou 1b1b1 où b est de longueur 4 (paire). Or c'est impossible.

▪ **Si a est de longueur 11** (11 = 5×2 +1)

Si les mots contiennent 0a0a0 ou 1a1a1 où a est de longueur 11, les mots de rang précédent contiennent 0b0b0 ou 1b1b1 où b est de longueur 5. Or, on vient de voir que c'est impossible.

▪ **Si a est de longueur 13** (13 = 6×2 +1)

Si les mots contiennent 0a0a0 ou 1a1a1 où a est de longueur 13, les mots de rang précédent contiennent 0b0b0 ou 1b1b1 où b est de longueur 6 (paire). Or c'est impossible.

▪ **Si a est de longueur 15** (15 = 7×2 +1)

Si les mots contiennent 0a0a0 ou 1a1a1 où a est de longueur 15, les mots de rang précédent contiennent 0b0b0 ou 1b1b1 où b est de longueur 7. Or, on vient de voir que c'est impossible.

On continue ainsi de suite en augmentant successivement la longueur de a de 2
(a= 17, a = 19, a = 21, etc.)

En prenant le mot de rang précédent, on obtiendra toujours une impossibilité démontrée dans les étapes précédentes.

Donc **ce mot ne contient pas 0a0a0 ou 1a1a1 où a est une même suite de 0 et 1 de longueur impaire.**

En conclusion, quelque soit la longueur de la suite a de 0 et 1, ce mot ne contient ni 0a0a0, ni 1a1a1. Par extension il ne peut non plus contenir 0a0a0a ni 1a1a1a.

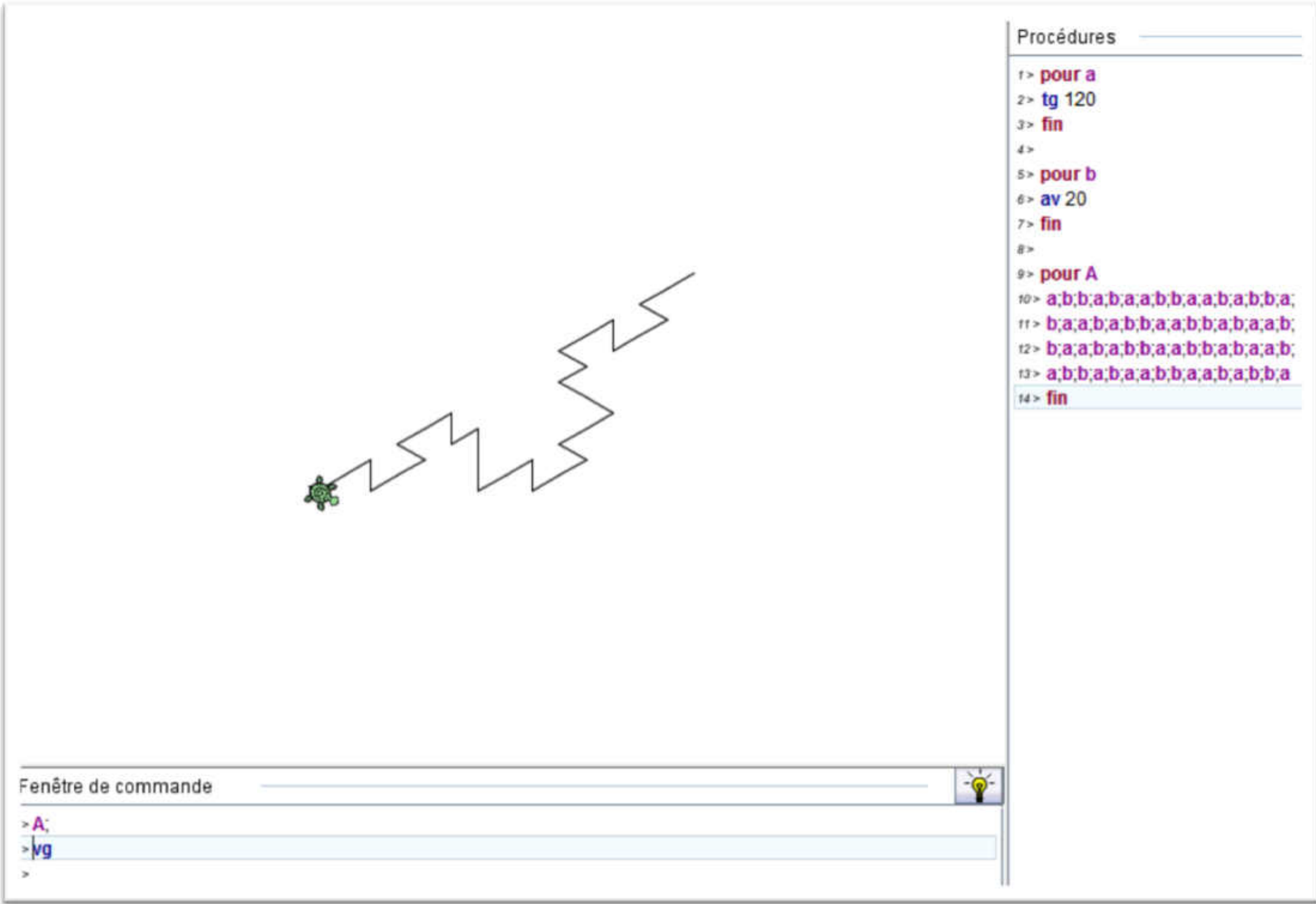
Ce mot ne contient donc aucun cube.

c) Illustration géométrique de nos mots à l'aide du logiciel GeoTortue

Pour illustrer géométriquement ce mot sans cube, notre chercheuse nous a dit de remplacer :

- *les 0 par une rotation à gauche de 120°*
- *les 1 par une avancée d'une unité.*

Nous avons alors programmé la construction de mots de différentes longueurs sur le logiciel Géotortue.



Ci-dessus, voici une copie d'écran de GéoTortue pour un mot de longueur 64.

Dans les procédures :

- a représente 0 et fait tourner à gauche la tortue de 120°.
- b représente 1 et fait avancer la tortue d'une unité de longueur.

C'est la représentation du mot de rang 6 car $64 = 2^6$

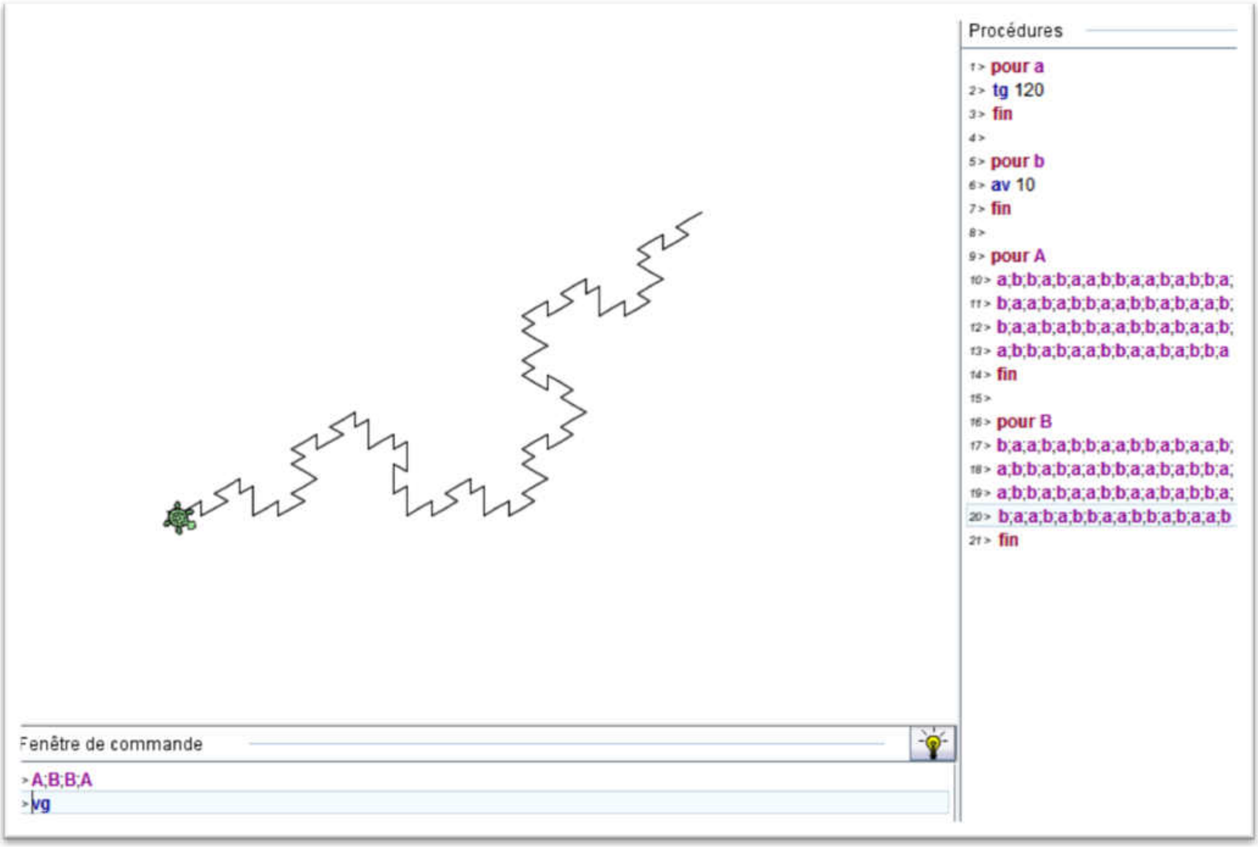


Illustration géométrique du mot de rang 8 comportant une suite de 256 chiffres 0 ou 1 car 256 = 2^8.

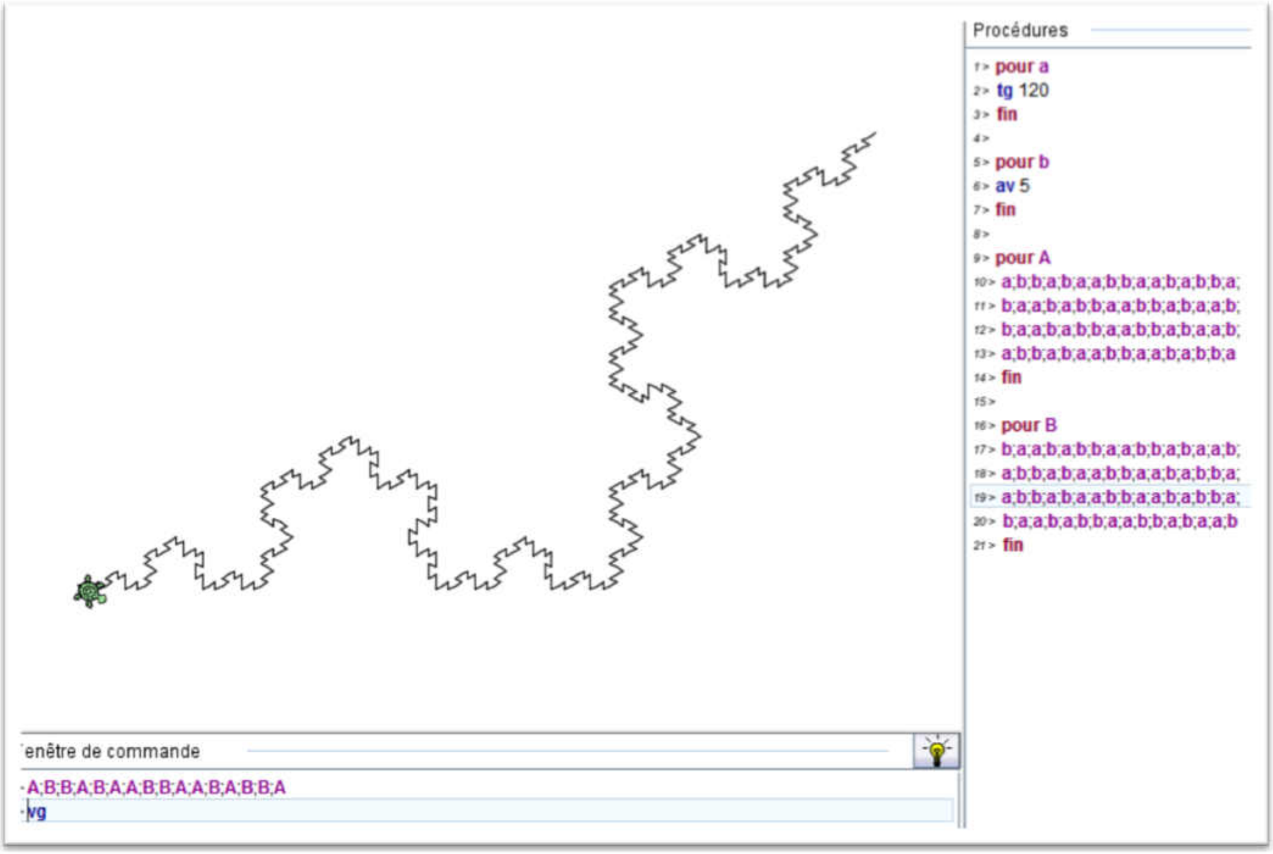


Illustration géométrique du mot de rang 10 de longueur 1 024 car 1 024 = 2^{10}.

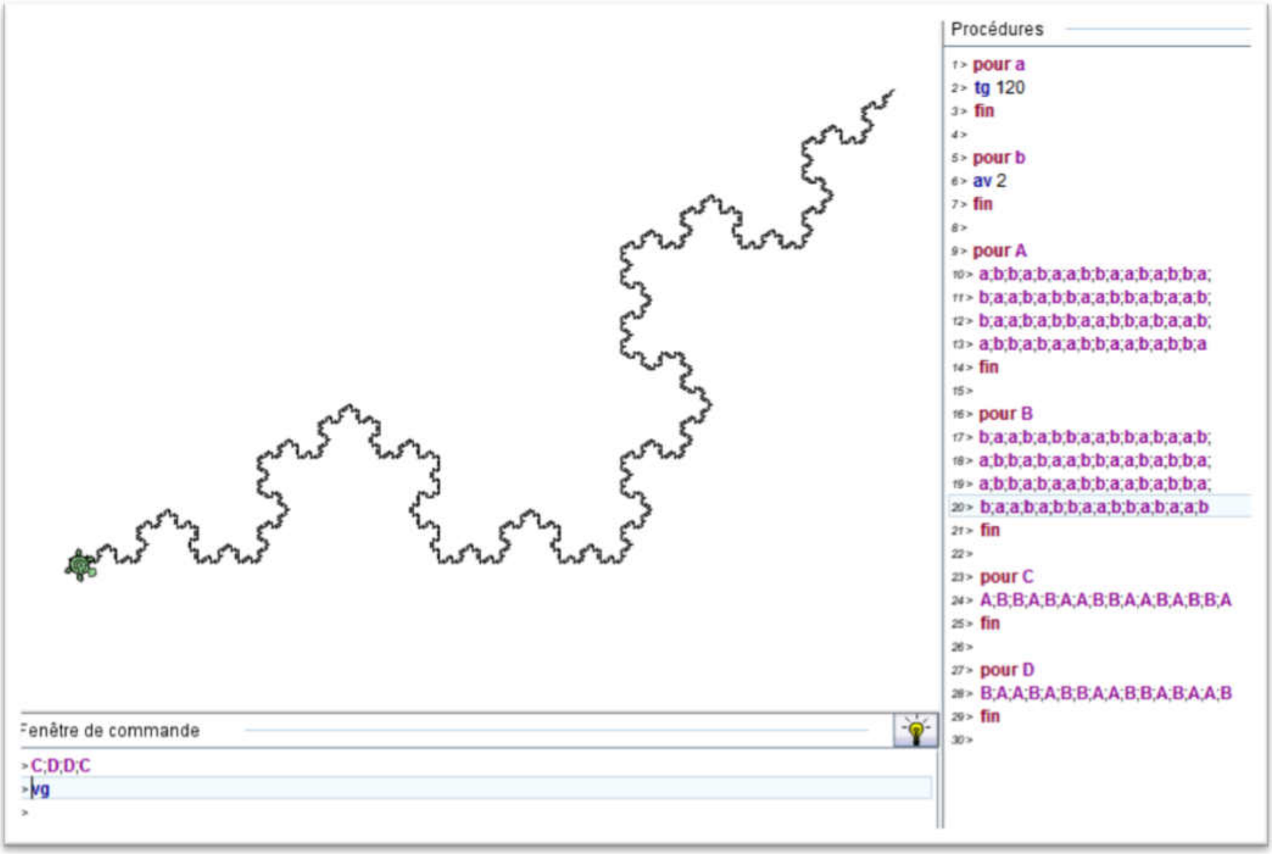
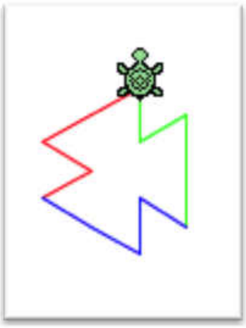
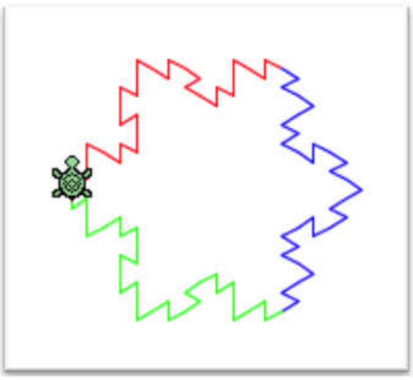
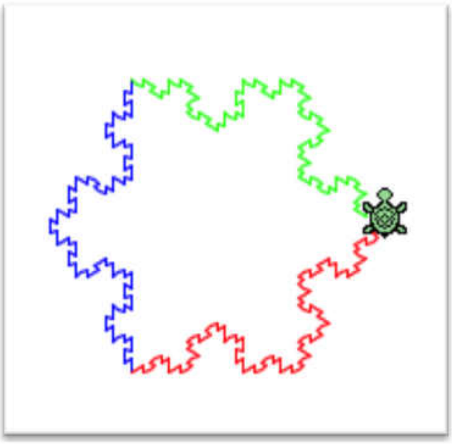


Illustration géométrique du mot de rang 12 de longueur 4096 car $4\,096 = 2^{12}$.

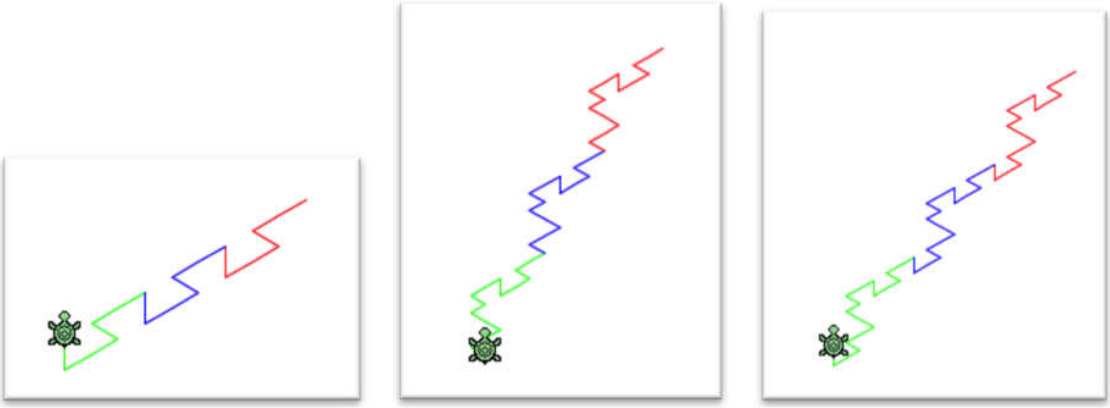
On remarque le « caractère fractal » des représentations géométriques des mots, ce qui est s'explique du fait que chaque mot contient le mot de rang précédent.

On a alors programmé des mots contenant des cubes et étudié comment on pouvait le visualiser.
On a pris des couleurs différentes pour chaque répétition de suite de 0 ou 1. On se retrouve forcément dans l'un des deux cas ci-dessous.

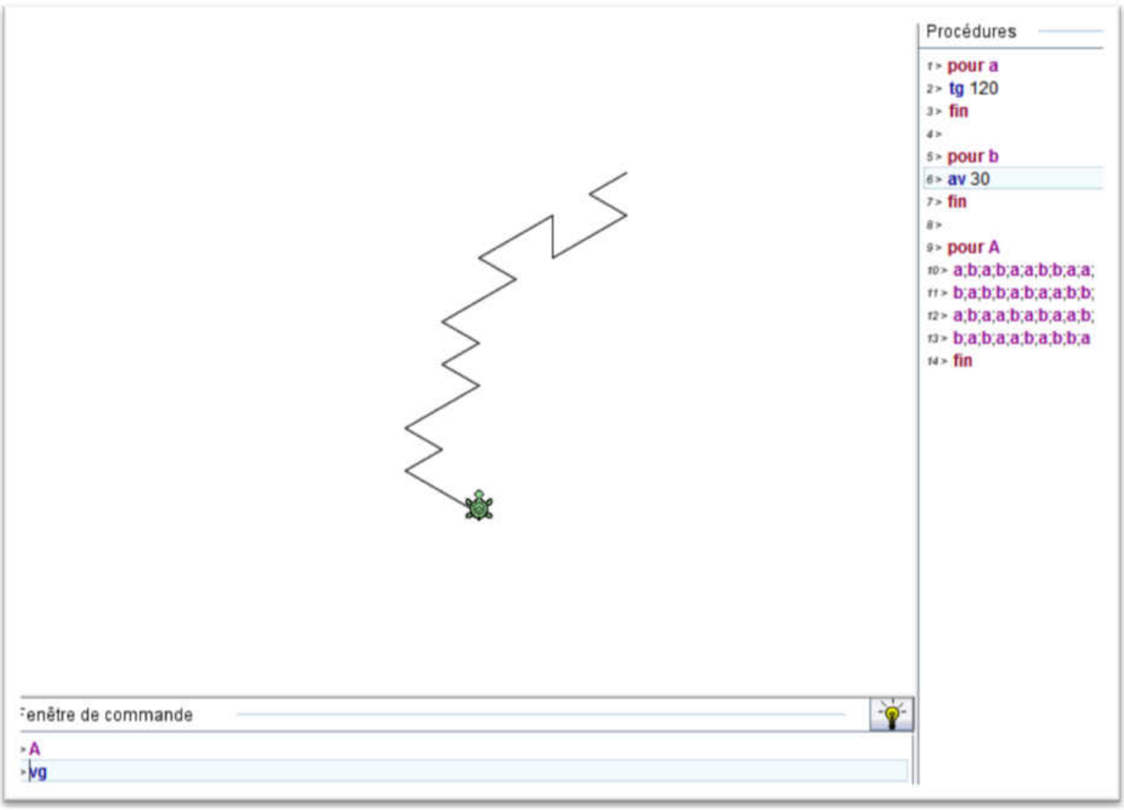
▪ Premier cas, la tortue revient au point de départ et la représentation géométrique forme une boucle. C'est les cas où la tortue redémarre dans une direction différente à celle du départ au moment de la répétition. Si on tourne 3 fois de 120° dans la même direction, cela revient à revenir au départ.

▪ Deuxième cas, on voit la figure qui se répète 3 fois de suite. C'est le cas ou la tortue redémarre dans la même direction qu'au départ au moment de la répétition.



Nous avons alors vérifié que notre mot de longueur 40 du début de l'exposé était sans cube en le représentant graphiquement.
Il s'agissait du mot **0101001100101101001101001010011010010110**



Sur l'illustration géométrique de ce mot, la tortue ne dessine aucune boucle et on ne retrouve pas 3 fois de suite un même morceau de figure côte à côte. Ce mot de longueur 40 que nous avons inventé ne possède donc aucun cube.

d) Réponse à la première question du problème

On décide de choisir du café ou du chocolat en suivant notre mot de longueur infinie sans cube:
0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 etc.
où 0 représentera le choix d'un café et 1 celui d'un chocolat.

Comme notre mot est de longueur infinie et sans cube, on a alors trouvé une suite de « café-chocolat-etc.» qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, sans aucune répétition d'une même séquence trois fois de suite côte à côte.

3°) Mots dont l'alphabet ne contient que les trois chiffres 0, 1 et 2

Et si on rajoute du thé !
On se pose la question de savoir si on peut trouver une suite de « Chocolat – Café –Thé – etc. » dans laquelle aucune séquence ne se répèterait deux fois de suite ?
Il nous faut un mot dont l'alphabet est constitué de trois symboles pour résoudre ce nouveau problème.

On cherche donc un mot de longueur infinie dont l'alphabet ne contient que 0, 1 et 2 et sans carré.

a) Mots sans carré

0201021202101201021202102012101201 est par exemple un mot sans carré de longueur 34 et cela devient assez difficile de l'allonger en étant sûr qu'il n'y ait pas de carré.

b) Mot de longueur infinie sans carré

On nous a alors dit d'utiliser le mot sans cube dont l'alphabet ne contient que 0 et 1.

En le regardant bien attentivement, on a constaté qu'il était aussi constitué que des 3 séquences ;
0, 01 et 011 comme on peut le voir si dessous.

0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 1 0 0 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 0 1 0 1 1 0 1 0 0 1-----

On a alors écrit un nouveau mot, de longueur infinie, en remplaçant :

0 par 0
01 par 1
011 par 2

On a obtenu le nouveau mot:
2 1 0 2 0 1 2 1 0 1 2 0 2 1 0 2 0 1 2 0 2 1 0 1 2 1 0 1--- .
Nous devons démontrer que ce nouveau mot ne possède aucun carré pour résoudre notre problème.

► **Supposons par exemple que ce mot contienne le carré de 201**.
On a donc dans le mot --- 201 201 c --- où c est le chiffre qui suit donc soit 0, 1 ou 2.
Si on repasse au mot correspondant ne contenant que 0 et 1, on obtient le mot ;
--- 011001 011001 0--- soit ---**0**11001 **0**11001 **0**---
On remarque qu'on peut alors l'écrire 0a0a0 où a est la même suite 11001.
Or on a vu que c'est impossible.
Donc **ce nouveau mot ne contient pas le carré de 201**.

$0 \rightarrow 0$
$1 \rightarrow 01$
$2 \rightarrow 011$

► **Cas général, supposons que ce nouveau mot contienne le carré d'une suite a de 0, 1 et 2.**

Il contient donc la suite **aab** où - a est la même suite de 0,1 et 2
- b est le chiffre qui suit (donc 0,1 ou 2).

Alors en repassant au mot correspondant ne contenant que 0 et 1 avant la substitution :

- a devient un mot commençant forcément par 0, on peut l'écrire 0c où c est une suite de 0 et 1
- b commence forcément par 0

Et on obtient alors la séquence **0c0c0**, où c est une même suite de 0 et 1.
Or on a vu que c'était impossible.
Donc **ce nouveau mot de longueur infinie ne contient donc pas de carré.**

c) Réponse à la deuxième question du problème

On décide de choisir du café, du chocolat ou du thé en suivant notre mot de longueur infinie sans carré: 2 1 0 2 0 1 2 1 0 1 0 2 0 2 1 0 2 0 1 2 0 2 1 0 1 0 2 1 0 ----- où 2 représentera le choix d'un café, 1 celui d'un chocolat et 0 celui d'un thé.

Comme ce nouveau mot est de longueur infinie et sans carré, on a alors trouvé une suite de « café-chocolat-thé- etc.» qui convienne jusqu'à la fin de nos jours, et même pour un nombre infini de jours, sans aucune répétition d'une même séquence deux fois de suite côte à côte.

Remerciements :
À notre chercheuse Irène Marcovici qui nous a encouragés et guidés tout au long de l'année, à la Mairie de Villers-lès-Nancy, au SIS du Grand Nancy et au rectorat de l'académie de Nancy-Metz qui nous ont permis de participer au congrès de Metz.