ARTICLE D'ELEVE POUR MATHS EN JEANS / ANNEE 2007-2008

<u>Année scolaire :</u> 2007-2008

<u>Etablissement scolaire :</u> Lycée Gambetta
80, boulevard Gambetta
59 200 Tourcoing

<u>Elève auteur de l'article :</u> Audrey GOËMINE, TS 3

<u>Nombre de pages de l'article :</u> 8 pages

<u>Titre du sujet :</u> Des carrés qui tournent en rond

<u>Description du sujet :</u> On part d'un nombre entier naturel. On calcule la somme des carrés de ses chiffres. On obtient un nouvel entier naturel, sur lequel on recommence la même opération, et ce ainsi de suite.
L'objectif est de prévoir le comportement des entiers qu'on obtient, en réitérant le procédé à l'infini, quel que soit l'entier de départ.

<u>Chercheur encadrant :</u> Mihai TIBAR, de l'université de Lille 1.

<u>Enseignant encadrant :</u> Guillaume VANBREMEERSCH, du lycée Gambetta de Tourcoing.

Maths en jeans

Les carrés qui tournent en rond

Énoncé : On choisit un nombre. On prend comme règle du jeu de faire la somme des carrés de ses chiffres. Le but étant de prouver l'existence d'une boucle c'est-à-dire qu'à un certain moment on retrouve un nombre déjà rencontré auparavant.

*Prenons l'exemple du nombre 22.

$22 \rightarrow 2^2 + 2^2 = 8 \rightarrow 8^2 = 64 \rightarrow 6^2 + 4^2 = 52 \rightarrow 5^2 + 2^2 = 29 \rightarrow 2^2 + 9^2 = 85 \rightarrow 8^2 + 5^2 = 89 \rightarrow 8^2 + 9^2 = 145$

$145 \rightarrow 1^2 + 4^2 + 5^2 = 42 \rightarrow 4^2 + 2^2 = 20 \rightarrow 2^2 + 0^2 = 4 \rightarrow 4^2 = 16 \rightarrow 1^2 + 6^2 = 37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58$

Dans cet exemple, nous trouvons le nombre 58. La somme des carrés de 58 et 85 étant la même, on peut donc en déduire que le nombre 22 boucle en 58 / 85.

*Étudions un autre exemple : 100.

$100 \rightarrow 1^2 + 0^2 + 0^2 = 1 \rightarrow 1^2 = 1$

Dans cet exemple, nous retrouvons le chiffre 1 dont la somme au carré est toujours égale à 1 c'est-à-dire 1. On peut donc en déduire que le nombre 100 boucle en 1.

*Étudions le cas du nombre : 1234.

$1234 \rightarrow 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 = 30 \rightarrow 3^2 + 0^2 = 9 \rightarrow 9^2 = 81 \rightarrow 8^2 + 1^2 = 65 \rightarrow 6^2 + 5^2 = 61 \rightarrow 6^2 + 1^2 = 37$

$37 \rightarrow 3^2 + 7^2 = 58 \rightarrow 89 \rightarrow 145 \rightarrow 42 \rightarrow 20 \rightarrow 4 \rightarrow 16 \rightarrow 37 \rightarrow 58$

Dans ce cas, nous retrouvons le nombre 58 déjà rencontré auparavant.
On peut donc en déduire que le nombre 1234 boucle en 58 / 85.

Nous avons ainsi étudié tous les nombres de 1 à 162 et nous nous sommes aperçus que pour tous ces nombres, la somme des carrés de leurs chiffres forme une boucle.

*Pour un nombre de 4 chiffres : n = 4

Le plus grand nombre à 4 chiffres étant 9999, la somme des carrés de ses chiffres sera alors la plus grande que nous pourrons rencontrer à savoir $9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 = n \times 9^2$

$= 4 \times 9^2$

$= 324$

Donc pour un nombre à n = 4 chiffres, le plus grand nombre que nous retrouverons dans le cycle sera 324.

Nous pouvons en déduire que pour un nombre à n = 4 chiffres, les nombres que nous allons rencontrer dans le cycle ne dépasseront pas n = 3 chiffres.

*Pour un nombre de 3 chiffres : n = 3

Le plus grand nombre à 3 chiffres étant 999, de même que précédemment, la somme des carrés de ses chiffres sera alors la plus grande que nous pourrons rencontrer à savoir : $9^2 + 9^2 + 9^2 = n \times 9^2$

$= 3 \times 9^2$

$= 243$

Donc pour un nombre à n = 3 chiffres, le plus grand nombre que nous retrouverons dans le cycle sera 243.

Nous pouvons alors en déduire que pour un nombre à n = 3 chiffres, les nombres que nous allons rencontrer dans le cycle ne dépasserons pas n = 3 chiffres.

Le nombre de possibilités sera alors progressivement restreint.

Nous avons vu que pour un nombre à 4 chiffres, le plus grand nombre rencontré dans le cycle est 324.

Or la somme des carrés des chiffres de 324 sera inférieure à celle de 399 c'est-à-dire à $3^2 + 9^2 + 9^2 = 171$.

Or la somme des carrés des chiffres de 171 est elle-même inférieure à celle de 199, c'est-à-dire à $1^2 + 9^2 + 9^2 = 163$.

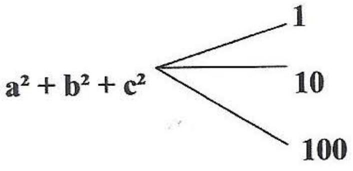
Or on sait que tous les nombres de 1 à 162 bouclent soient en 58 / 85 soit en 1.

Conclusion : Nous pouvons conclure que dans tous les cas nous allons être enfermés dans un ensemble fini dont on élimine peu à peu des éléments et que donc nous allons retrouver un nombre déjà rencontré auparavant. On peut affirmer que tous les nombres formeront une boucle qui sera soit en 58 / 85 soit en 1 et non d'un autre type.

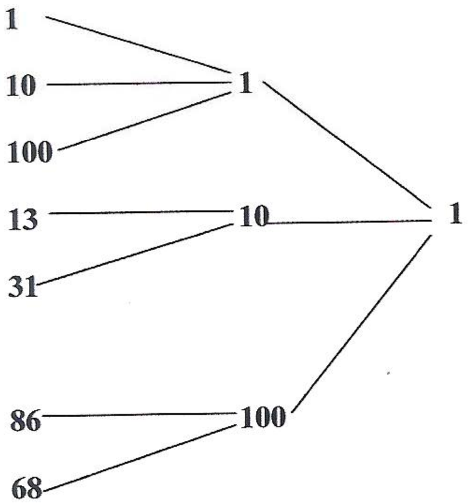
Nous pouvons même dire que la majorité des nombres comme 20 ; 200 ; 2000 ; 30 ; 15 ; 123 ou encore 74 ou même 26 bouclera en 58 / 85

En ce qui concerne les nombres bouclant en 1, on trouve 1 ; 10 ; 100 c'est-à-dire les puissances de 10, ou encore des nombres comme 86, 97 ou encore 133, et même 139.

$N = \overline{abc}$



Par exemple, 1 ; 13 ; 31 ; 103 ; 301 ; 10 ; 100 bouclent en 1.



Voici le tableau récapitulatif des nombres de 1 à 162 et de leur type de boucle :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26	27	28	29
30	31	32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55	56	57	58	59
60	61	62	63	64	65	66	67	68	69
70	71	72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87	88	89
90	91	92	93	94	95	96	97	98	99
100	101	102	103	104	105	106	107	108	109
110	111	112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127	128	129
130	131	132	133	134	135	136	137	138	139
140	141	142	143	144	145	146	147	148	149
150	151	152	153	154	155	156	157	158	159
160	161	162							

- **Nombres qui bouclent en 1**
- **Nombres qui bouclent en 58/85.**

Tentons de démontrer l'existence de cette boucle.

Soit n le nombre de chiffres composant un nombre.

En effectuant, la somme des carrés, on perd au moins un chiffre. **(1)**

N = $\overline{a_1 a_2 \ldots\ldots a_n}$

Somme des carrés des chiffres de N ≤ 81 n **(2)**

On sait que $a_1 \leq 9$

$a_2 \leq 9$

....

$a_n \leq 9$ car on travaille en base 10.

Alors on a : $a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots\ldots + a_n{}^2 \leq 9^2$ n

On a : $a_1{}^2 + a_2{}^2 + \ldots\ldots + a_n{}^2 \leq 81$ n.

On sait que cette somme possède moins de n chiffres. **(3)**

Or on veut que $81\ n \leq 10^{n-1}$.

Il suffit alors de montrer que : $81\ n \leq 100\ n$

$10^2\ n \leq 10^{n-1}$

dès que $n \leq \frac{10^{n-1}}{10^2}$

C'est-à-dire qu'il suffit de montrer que $n \leq 10^{n-3}$.

Valeurs de n	10^{n-3}
3	1
4	10
5	100
6	1000

+ 1 X 10

Tentons de prouver par récurrence l'existence de cette boucle

D'après l'observation du tableau ci-dessus, on peut dire que pour n = 3, la propriété est fausse c'est-à-dire que n n'est pas inférieur à 10^{n-3}.

Alors, la propriété est vraie à partir de n = 4.

Posons : k = n – 3, pour k ≥ 0

Valeurs de k	k + 3	10^k
0	3	1
1	4	10
2	5	100
3	6	1000

(4)

Objectif : Montrer que 81 n ≤ 10^{n-1}

Implication d'hérédité :

On suppose que (P_n) est vraie c'est-à-dire que n ≤ 10^{n-3}.

k + 3 ≤ 10^k

(P_{n+1}) : (k + 1) + 3 ≤ 10^{k+1}

: k + 4 ≤ 10^{k+1}

Or: (P_n) x 10: 10 x (k + 3) ≤ 10^k x 10

: 10 k + 30 ≤ 10^{k+1}

Or k + 4 ≤ 10 k + 30   car 10 k + 30 = (k + 4) + 9k + 26

Donc k + 4 ≤ 10 k + 30 ≤ 10^{k+1}

Avec k = n – 3, n + 1 ≤ 10 n + 30 ≤ 10^{n-2}

Donc, si on divise par 10 :

On obtient (P_{n+1}) c'est-à-dire : $n + 1 \leq 10^{n-2}$

Alors (P_{n+1}) est vraie

Conclusion : (P_n) est vraie, donc : pour $n \geq 4$, $n \leq 10^{n-3}$.

CONCLUSION :

On peut affirmer que cette boucle existe.

On peut également dire qu'en effectuant la somme des carrés des chiffres composant un nombre, on perd au moins un chiffre.

(5)

Notes de l'éditeur :

(0) il s'agit des nombres d'au plus 4 chiffres

(1) c'est ce qu'on veut démontrer; on voit une contradiction avec l'étude du cas 1234 (89-145 surligné bleu)

(2) On va démontrer ce résultat

(3) La somme des carrés perd un chiffre se traduit en disant qu'elle est inférieure à 10 exposant n-1 et finalement par n inférieur à 10 exposant n-3

(4) Ici, débute une récurrence afin de démontrer que n est inférieur à 10 exposant n-3 à partir de n=4

(5) Ce nombre doit avoir au moins 4 chiffres.