Coloriage de Polyèdres

Année 2019-2020

VASSEUR Baptiste, FROIDURE Benjamin, GODARD Mattéo et VALLERAND Victor, élèves de 4ème

Encadrés par Florence Ferry et Asselain-Missenard Claudie

Établissement : Collège Alain-Fournier (Orsay)

Chercheur : Raphaël Tinarrage (Université Paris Sud)

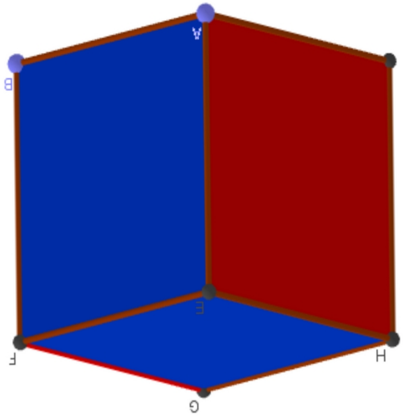
Coloriage du cube

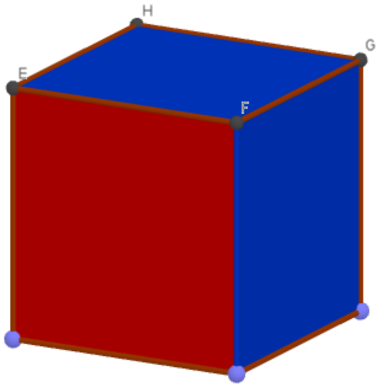
On se donne des faces bleues et des faces rouges.

Combien de cubes différents peut-on constituer ?

Et si on augmente le nombre de couleurs ?

Remarque :
En faisant tourner le cube sur lui-même, on obtient des cubes identiques. (1)





Sommaire

1) Le cube

- 1 couleur
- 2 couleurs
- 3 couleurs
- 6 couleurs

2) Le dodécaèdre

1 - Le cube

1 couleur

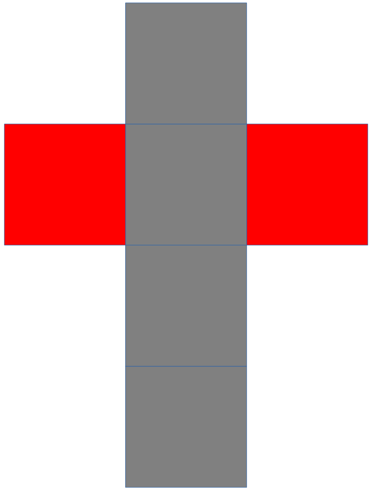
De façon évidente, il n’y a qu’**une façon de colorier un cube** avec une couleur puisque toutes les faces sont de la même couleur.

2 couleurs

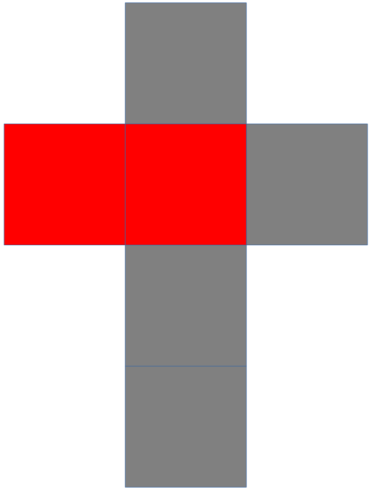
- Si 1 seule face est rouge :
un seul cube possible, peu importe où se trouve la face rouge.

2 couleurs

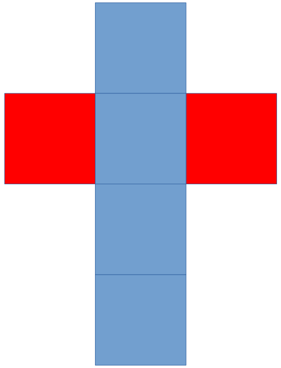
- Si 2 faces sont rouges, on a deux cas :

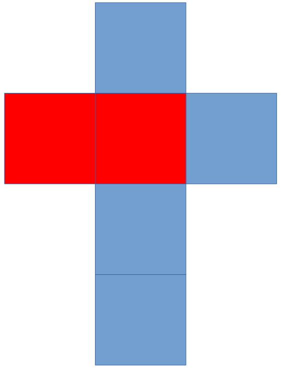


Les deux faces
rouges sont opposées.



Les deux faces rouges
sont adjacentes.

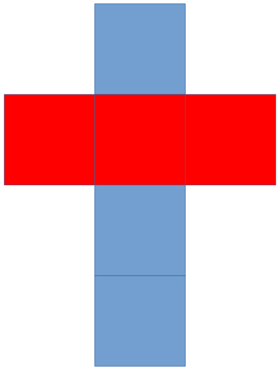


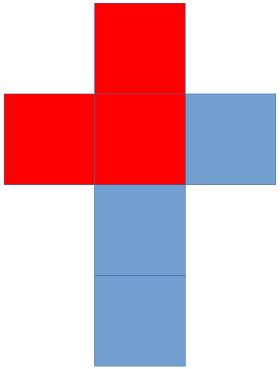


Quelque soit la façon dont on place les faces rouges, on obtient un seul cube pour chaque cas.

Donc il y a seulement 2 possibilités pour construire ce cube.

- Si 3 faces sont rouges, il y a encore deux cas :





Les faces rouges sont « alignées ».

Les deux faces rouges forment un coin du cube.

Ici encore, quelque soit la façon dont on place les faces rouges, on obtient un seul cube pour chaque cas.

Donc il y a seulement 2 possibilités pour construire ce cube.

- Si 4 faces sont rouges, il y en a 2 de bleues et on est revenu au même raisonnement que pour 2 rouges → il y a 2 possibilités.

- De même si 5 faces sont rouges, 1 est bleue donc 1 seule possibilité.

- 6 faces rouges → impossible, il nous faut ici deux couleurs.

Conclusion

Nombre de faces rouges	Nombre de cubes différents
1	1
2	2
3	2
4	2
5	1

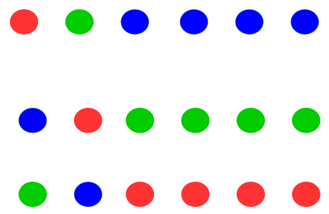
Il y a donc 8 façons de colorier un cube avec 2 couleurs.

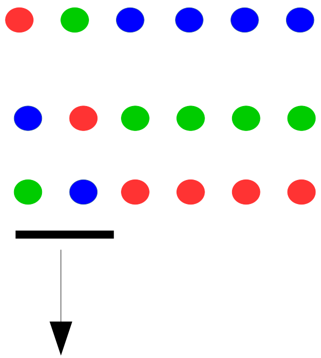
3 couleurs

Prenons par exemple Rouge/bleu/vert

1) 2 couleurs ne sont présentes chacune que sur une seule face, les 4 autres faces sont de la même couleur.

3 cas sont possibles :



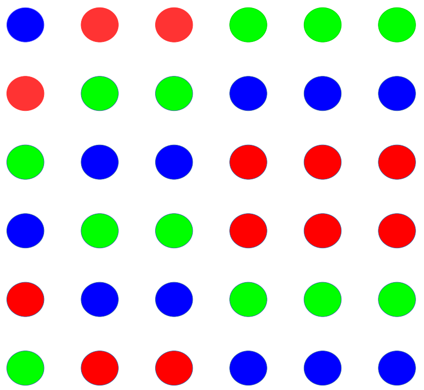


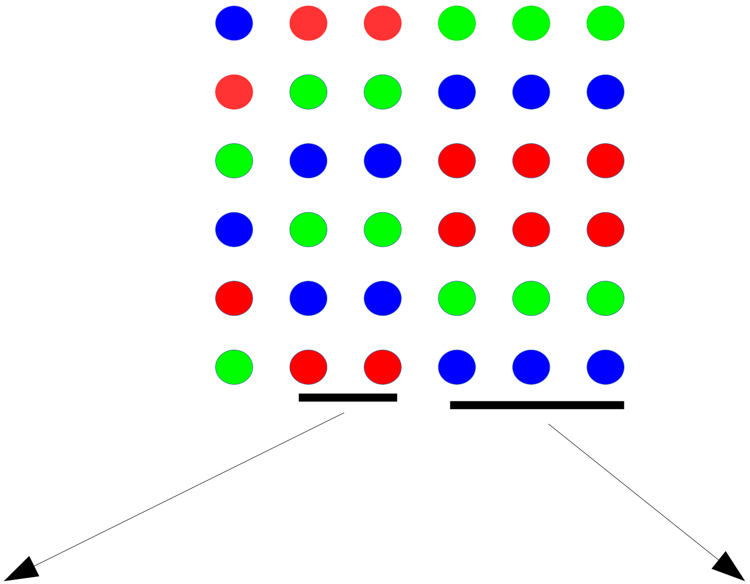
Pour les 2 faces de couleurs différentes présentes sur une seule face, on a 2 cas de position : elles sont soit sur des faces opposées soit sur des faces adjacentes.

Ce qui nous donne 2 possibilités pour chaque cas donc en tout : **6 possibilités de coloriages.**

2) <u>1 couleur est sur une seule face et la deuxième couleur sur 2 faces</u>, les 3 autres faces sont coloriées avec la 3è couleur.

Voici les cas possibles :

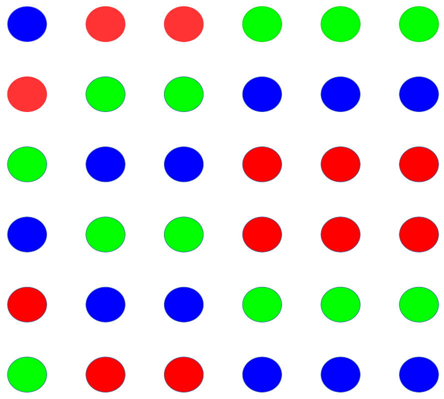




Pour les 2 faces d'une couleur 2 possibilités. Faces opposées ou adjacentes.

Pour les 3 faces d'une couleur, 2 possibilités en coin ou en bande.(2)

Si les 3 mêmes couleurs sont :



En bande
(6 cas)

Les 2 faces de même couleur
Sont opposées (1 cas)

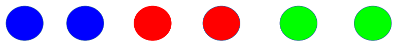
Les 2 faces de même couleurs
Sont adjacentes (1 cas)

en coin
(6 cas)

L es 2 faces
de la même couleur sont forcément
Adjacentes (1 cas)

Au total : 6x1 + 6x1 + 6 = 18 possibilités

3) Il nous reste à traiter le cas où les 3 couleurs sont présentes chacune sur 2 faces chacune :



→ 1 couleur est sur 2 faces opposées et les autres sont sur des faces adjacentes → **3 cas**

→ Les 3 couleurs sont sur des faces opposées. → **1 cas**

→ Les 3 couleurs sont sur des faces adjacentes. → **2 cas**

Au total : 6 possibilités

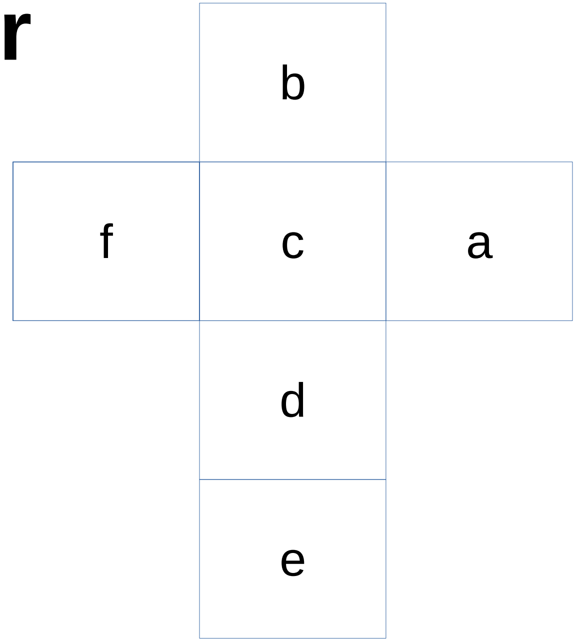
Conclusion

Nombre de faces par couleur	possibilité
1 / 1 / 4	6
1 / 2 / 3	18
2 / 2 / 2	6

Il y a donc 30 façons différentes de colorier un cube avec 3 couleurs.

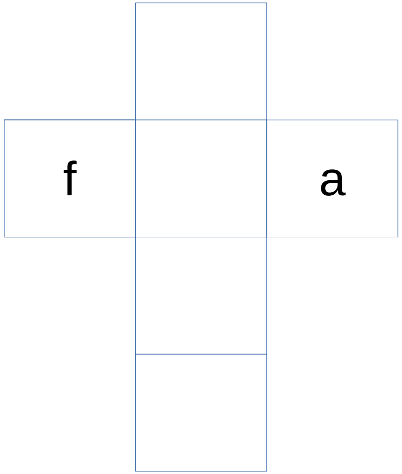
6 couleurs

Méthode 1 : on raisonne à partir du cube lui même.



On repère chaque face par une lettre.

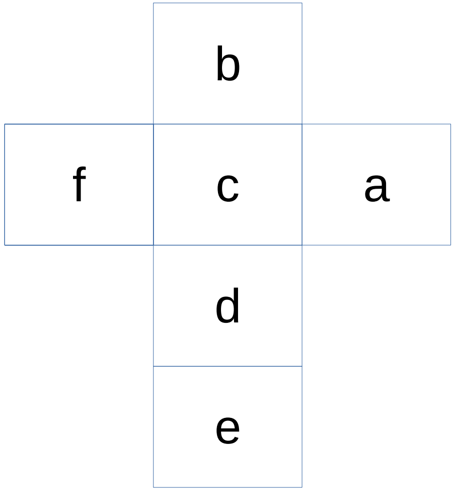
On choisi une couleur et on la met en a.



On met une autre couleur en f : 5 cas.

Sur la bande il reste les couleurs,
appelons les 1 / 2 / 3 / 4, à placer.
Si on ne tient pas compte des cubes identiques, il y a 24 façons de mettre le 1 / 2 / 3 / 4 :
4 façons pour la 1ère case, 3 façons pour la 2ème et 2 façons pour la 3ème et 1 façon pour la dernière.

$$4 \times 3 \times 2 \times 1 = 24$$



<u>a et f sont fixés (5 cas).</u>

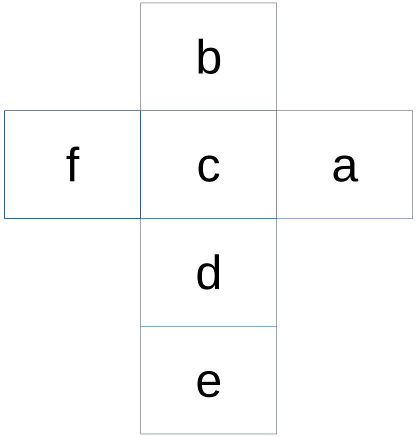
<u>Regardons les cubes identiques.</u>

En b/c/d/e, on place les couleurs 1/2/3/4.

6 Cas :

1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	2	3
4	3	4	2	3	2

1	1	1	1	1	1
2	2	3	3	4	4
3	4	2	4	2	3
4	3	4	2	3	2

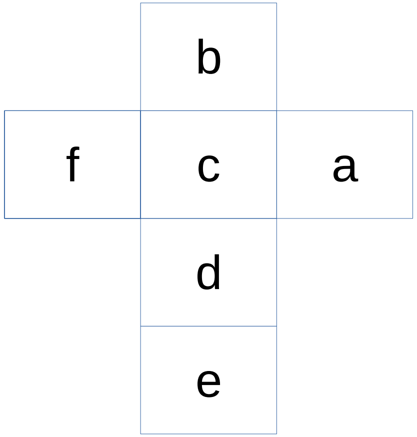


(3)

Toutes les autres combinaisons reviennent à celles-ci : ce sont des permutations.

Exemple : 4 2 1 3 c’est la même que : 1 3 4 2

Permuter les couleurs en b c d e revient en fait à faire une rotation du cube autour d'un axe qui passerait par les centres des faces a et f ; faire cette rotation nous donne des cubes identiques.

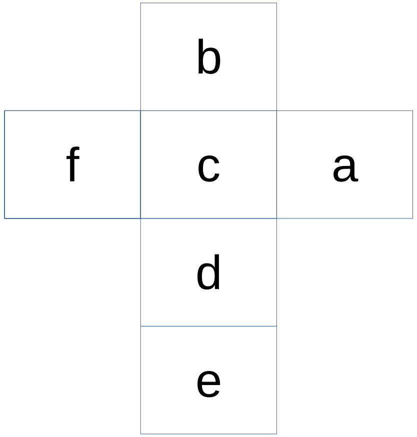


On a donc en tout : $6 \times 5 = 30$ cubes différents.

Conclusion méthode 1

Il y a donc 30 façons de colorier un cube avec 6 couleurs.

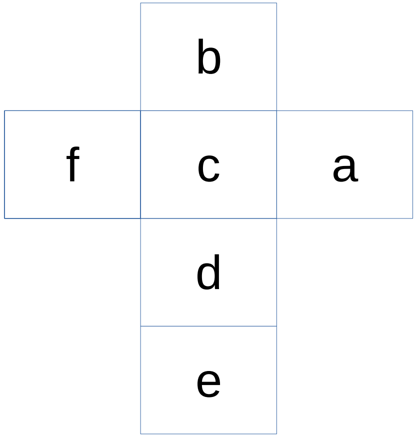
Méthode 2 : on compte les patrons puis les cubes



On compte les façons de colorier ce patron :
- pour la face a on peut mettre 6 couleurs
- pour la face b on ne peut plus mettre que 5 couleurs

et ainsi de suite jusqu'à f où nous ne pourrons mettre plus qu’une couleur.
Le calcul du nombre total de coloriages pour le patron est donc 6x5x4x3x2x1=720

Mais plusieurs patrons donnent
le même cube !



A partir d'un cube colorié, quand on le déplie pour en trouver le patron, il y a 6 façons de choisir la couleur qui se retrouvera en a. La couleur de la face f sera alors imposée (face opposée sur le cube).

Ensuite, il y aura 4 façons différentes de déplier la bande centrale b, c, d, e, selon la couleur choisie pour la face b.

Il y a donc 6x4 = 24 patrons différents pour le même cube.

On a trouvé 720 façons différentes de colorier notre patron.
Mais il y a 24 patrons coloriés différents pour un même cube..

720 : 24 = 30

Il n'y a donc que 30 cubes différents.

Conclusion méthode 2

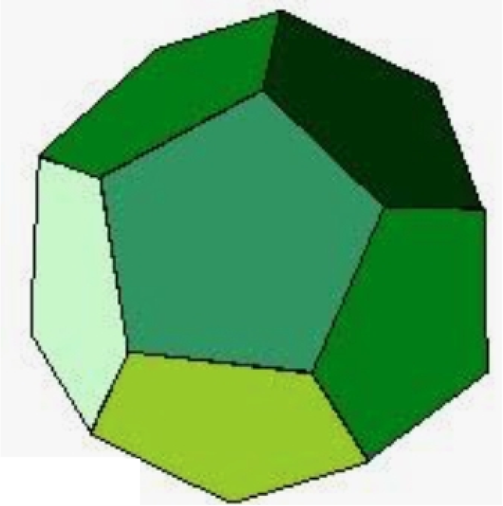
Il y a donc 30 façons de colorier un cube avec 6 couleurs.(4)

Extension

Combien y a t-il de façons de colorier un dodécaèdre avec 12 couleurs ?

Le dodécaèdre

Polyèdre à 12 faces qui sont des pentagones réguliers.

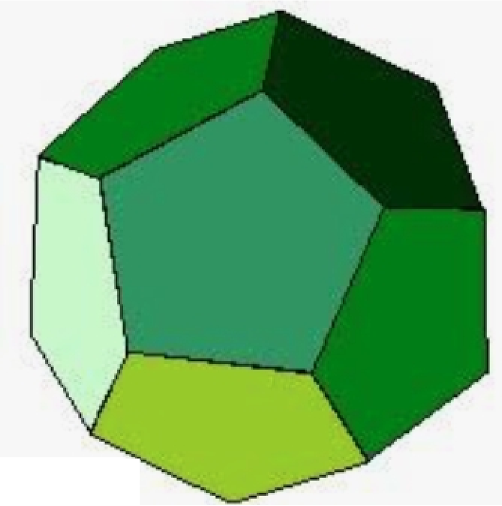


Nous procédons comme le cube.

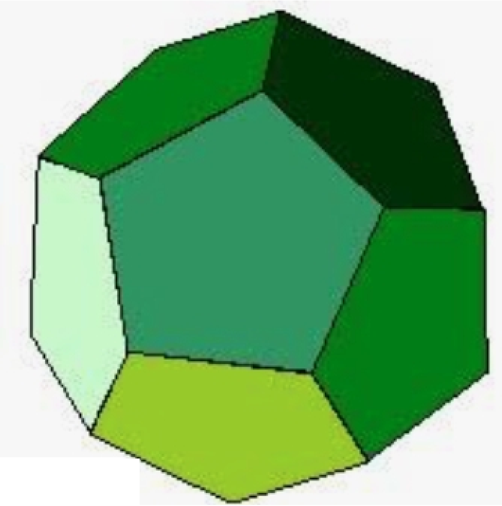
Le nombre de possibilités, si on ne compte pas ceux qui vont être identiques est (5):

12 ! = 1 x 2 x 3 x ………. x 11 x 12

= 479 001 600



A ce nombre, on va enlever(6) tous ceux obtenu par rotation : on divise par 5 (le nombre de rotations donnant les même solide autour d’un axe donné) multiplié par le nombre de faces sur lesquelles on peut faire cette rotation : 12.



Ce qui nous donnerait comme nombre de dodécaèdres différents avec 12 couleurs :

479 001 600 : 60 = **7 983 360 (7)**

FIN

Notes d’édition

(1) On considère que deux cubes colorés sont les mêmes si, en tournant l’un d’entre eux, on trouve l’autre.

(2) Le terme « bande » se réfère au patron du cube : les trois faces sont situées sur ce patron en « bande ». De même pour le terme « en coin » : les trois faces forment un coin sur le patron (et sur le cube entourent un sommet).

(3) Le tableau et le patron représenté ici sont les mêmes que ceux ceux de la diapositive précédente. Chaque colonne du tableau représente une disposition des couleurs dans la bande « b c d e ».

(4) Il est rassurant de trouver le même résultat par deux méthodes différentes !

(5) Les dodécaèdres « identiques » s’obtiennent ici par les rotations qui « conservent » le dodécaèdre.

(6) On ne peut pas dire qu’on « enlève » les dodécaèdres obtenus par rotation, mais va compter le nombre de rotations qui conservent le solide et diviser par ce nombre de rotations le nombre qu’on vient de trouver.

(7) Et oui ! Le nombre de rotations qui conservent le dodécaèdre est bien 60, mais ce n’est pas si facile à voir...