Cet article est rédigé par des élèves. Il peut comporter des oublis et imperfections,
autant que possible signalés par nos relecteurs dans les notes d'édition.

Comment construire le jeu de ¿ DOBBLE ?

Année 2016-2017

Élèves : Monika Majkowska, Monika Plutecka, Julia Pszczołowska en classe de terminale

Établissement : Lycée bilingue Żmichowska, Varsovie, Pologne

Enseignante : Mme Jolanta Otrębska

Chercheur : M. Marcin Moszyński, Université de Varsovie

Consultations linguistiques : Mme Katarzyna Kozłowska

Dobble est un jeu de cartes pour 2 personnes au minimum. On a un tas de cartes. Dans la version originale chaque carte contient 8 symboles différents. Chaque couple de cartes possède un seul symbole qui se répète sur les deux cartes.

Il y a beaucoup de méthodes pour jouer au Dobble. La méthode plus populaire c'est quand chaque personne pioche une carte et on place le reste au milieu de la table, face visible. Chaque joueur essaie de trouver le symbole commun pour sa carte et la carte du milieu. La personne qui sera la première pioche la carte du milieu. Le but du jeu est d'avoir plus de cartes que les autres joueurs.

***

Table des matières:

1. **Introduction**
2. **Description de l'ensemble original de Dobble**
3. **Quelques modifications de l'ensemble original**
4. **Maximalité des ensembles de Dobble**
5. **Présentation de la méthode de construction d'ensembles de Dobble**

***

1. Introduction

Notre but est de décrire mathématiquement les ensembles des cartes comme celui-ci qui est utilisé pour le jeu Dobble. On va commencer par l'ensemble original puis on va le modifier et on va construire de nouveaux ensembles de Dobble.

Notations

- **S** : l'ensemble de symboles
- **N** : l'ensemble de cartes
- **s** : le nombre de symboles dans **S**
- **n** : le nombre de cartes dans **N**
- **k** : le nombre de symboles sur une carte
- **Ensemble de Dobble :** un ensemble de cartes où il y a le même nombre de symboles sur chaque carte et chaque couple de cartes possède un seul symbole commun
- **Ensemble maximal** : ensemble de Dobble auquel on ne peut ajouter aucune carte sans changer les règles de l'ensemble de Dobble
- **Ensemble parfait** : ensemble de Dobble où tous les symboles de S apparaissent le même nombre de fois, c'est-à-dire pour chaque symbole de **S** le nombre de cartes contenant ce symbole est le même. On va nommer ce nombre **r**.

***

2. Description de l'ensemble original de Dobble

Pour décrire l'ensemble original de Dobble on a créé le tableau où chaque carte est présentée en détail. Chaque ligne présente une carte et les colonnes représentent les symboles. Si un symbole apparaît sur la carte on met « 1 » dans l'intersection de la colonne et de la ligne.

.	Bonhomme de neige	Casserolle	Foudre	Bombe	Bouteille	Clé	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Œil	Clef	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Gel	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Dissolu	Voiture	Fromage	Cœur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Livres	Point d'exclamation	Yin-yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
1				1									1				1														1									1						1				1				1		
2														1										1	1	1									1	1														1				1		
3						1						1									1		1													1							1						1							1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																					
5	1		1			1	1										1								1												1															1				
6						1			1		1							1											1						1									1		1										
7							1				1																					1	1								1											1		1		1
8							1																							1				1			1			1		1		1					1	1						
9			1					1							1	1															1					1							1	1												
10																	1				1			1					1										1		1	1		1												
11						1										1				1						1	1					1								1	1																
12										1		1				1																					1		1				1					1		1						
13							1		1			1														1		1			1								1									1									
14	1												1						1		1	1				1							1											1												
15												1	1														1			1					1						1											1		1			
16					1			1				1						1				1															1				1														1		
17									1							1						1		1																								1		1		1	1			
18										1								1															1			1		1	1	1												1					
19															1		1	1								1				1													1										1			1	
20						1		1					1	1														1									1								1								1				
21	1			1							1	1			1					1				1													1																				
22							1								1							1	1												1					1					1				1							
23		1																		1																							1	1	1		1					1			1		
24																		1	1	1					1			1													1							1	1							
25	1																																			1				1					1	1		1				1	1			
26					1											1	1		1															1			1									1										1
27						1									1				1															1					1										1				1	1		
28			1		1					1	1															1																		1					1				1			
29					1		1						1							1									1							1												1							1	
30										1		1		1			1															1												1					1	1						
31				1		1				1												1																				1					1				1				1	
32											1			1					1				1								1										1											1				1	
33		1		1			1							1		1		1			1																																	1			
34				1	1																		1		1		1												1				1									1				
35		1																					1			1											1	1			1			1		1										
36		1							1	1			1		1										1																1																1
37												1				1									1								1	1										1	1										1		
38			1											1						1		1								1									1						1											1
39				1				1																		1			1					1														1			1				1
40			1										1					1					1	1								1		1													1									
41		1	1									1							1										1										1											1		1				
42																						1			1				1		1	1					1				1												1			
43					1										1						1							1				1												1				1	1						
44	1				1				1					1																				1					1		1	1													
45			1	1																								1					1		1					1		1					1								
46	1																	1									1				1														1			1			1				1
47										1											1	1									1			1	1		1																1			
48			1						1													1						1										1										1						1	1	
49														1	1													1		1				1			1										1			1						
50				1					1										1												1		1			1	1							1											
51								1	1								1			1				1									1																	1			1			
52		1			1	1																			1						1	1		1															1						
53								1			1										1					1					1								1								1	1							
54							1	1		1									1					1			1																1			1									
55																								1					1								1		1				1									1		1	1
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

Pour l'ensemble original de Dobble:

- **s** = 57
- **n** = 55
- **k** = 8
- les symboles apparaissent 6, 7 ou 8 fois - **l'ensemble original de Dobble n'est pas parfait**
- **l'ensemble n'est pas maximal** (démonstration – point 3.1)

***

3. Quelques modifications de l'ensemble original

3.1 On ajoute des cartes à l'ensemble original de Dobble

Pour créer de nouvelles cartes on utilise particulièrement les symboles qui se répètent 6 ou 7 fois. Le premier symbole dans le tableau qui se répète moins que 8 fois est le bonhomme de neige. On met en bleu la colonne bonhomme de neige et puis on souligne en même couleur toutes les cartes qui contiennent le symbole de bonhomme de neige.

.	Bonhomme de neige	Cocotte	Foudre	Bombe	Bouteille	Clé	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Œil	Œf	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Arrow	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Gel	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Cœur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Livres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
1				1									1				1														1									1					1				1				1			
2														1										1	1	1									1	1														1				1			
3						1						1									1		1													1							1						1							1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																					
5	1		1			1	1										1								1												1														1					
6						1			1		1							1											1						1								1		1											
7							1				1																					1	1								1											1		1		1
8							1																							1				1				1		1			1						1	1						
9			1					1							1	1															1					1						1		1												
10																	1				1			1					1										1		1	1			1												
11						1										1				1						1	1					1								1	1																
12											1		1			1																					1		1				1					1		1						
13							1		1			1														1		1			1								1								1										
14	1												1						1		1	1				1							1											1												
15												1	1														1			1					1						1										1		1			
16					1			1				1						1				1															1				1													1		
17									1							1						1		1																							1		1		1	1			
18										1								1															1			1		1	1	1											1					
19															1		1	1								1				1													1									1			1	
20						1		1					1	1														1									1								1							1				
21	1			1							1	1			1					1				1													1																				
22							1								1							1	1												1					1				1				1								
23		1																			1																						1	1	1		1				1			1		
24																		1	1	1					1			1												1								1	1							
25	1																																			1				1					1	1		1			1	1			
26					1											1	1		1																1			1								1										1
27						1									1				1															1				1										1					1	1		
28			1		1					1	1															1																		1					1				1			
29					1		1						1							1									1							1											1							1	
30										1		1		1			1															1											1				1	1							
31				1		1				1												1																			1				1				1					1	
32											1			1					1				1								1									1											1				1	
33		1		1			1							1		1		1			1																																1			
34				1	1																		1		1		1											1				1									1				
35		1																					1			1											1	1			1				1		1								
36		1							1	1			1		1										1															1																	1
37												1				1									1								1	1											1	1									1	
38			1											1							1		1								1								1							1										1
39				1				1																			1		1					1														1			1				1
40			1										1					1					1	1								1		1													1								
41		1	1									1							1										1										1												1		1			
42																						1			1				1		1	1					1						1										1			
43					1										1						1							1				1													1					1	1				
44	1				1				1					1																				1					1		1	1													
45			1	1																								1					1		1					1		1						1							
46	1																	1									1				1														1			1		1						1
47										1										1	1										1			1	1		1															1				
48			1						1												1						1											1										1						1	1
49														1	1												1		1				1				1										1			1						
50				1					1										1											1		1			1	1								1											
51								1	1								1			1			1										1																	1			1		
52		1			1	1																		1						1	1		1															1							
53								1			1										1				1					1									1								1	1							
54							1	1		1									1					1			1															1			1										
55																								1				1									1			1				1									1		1	1
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

Le symbole suivant qui se répète moins que 8 fois, c'est la coccinelle. On met en jaune la colonne et on observe les points d'intersection de couleurs jaune et bleu pour vérifier si le bonhomme de neige et la coccinelle sont déjà apparus ensemble sur une carte.

.	Bonhomme de neige	Coccinelle	Foudre	Bombe	Bouteille	Cible	Lunettes	Crane	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Clé	Clef	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Oeil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Coeur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Lèvres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
1				1									1				1														1								1						1				1				1		
2														1										1	1	1									1	1														1				1		
3						1					1										1		1													1						1								1						1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																					
5	1		1			1	1										1								1												1														1					
6						1			1		1							1											1						1								1		1										
7							1				1																					1	1								1											1		1		1
8							1																							1				1			1			1		1		1					1	1					
9			1					1							1	1															1					1							1		1										
10																	1				1			1					1									1		1	1			1												
11						1										1				1						1	1					1							1	1																
12											1		1			1																					1		1				1						1		1				
13							1		1			1														1		1			1								1								1									
14	1												1						1		1	1				1							1											1												
15												1	1														1			1					1						1											1		1		
16					1			1				1						1				1															1				1													1		
17									1							1						1		1																											1	1				
18										1								1															1			1		1	1	1												1				
19															1		1	1								1				1													1											1		1	
20						1		1					1	1														1										1							1								1				
21	1			1							1	1			1					1				1														1																				
22							1								1							1	1												1					1					1				1								
23		1																		1																							1	1	1		1					1			1		
24																		1	1	1					1		1														1							1	1								
25	1																																			1				1					1	1		1			1	1			
26					1											1	1		1																1		1									1										1
27						1									1				1															1				1										1						1	1		
28			1		1					1	1															1																			1				1				1			
29					1		1						1							1									1							1											1								1		
30										1		1		1			1															1											1				1	1								
31				1		1				1												1																			1					1				1				1		
32											1			1					1				1								1										1											1			1		
33		1		1			1							1		1		1			1																																	1			
34				1	1																		1		1		1											1					1									1				
35		1																					1			1											1	1			1			1		1										
36		1							1	1			1		1										1																1																1
37												1				1									1								1	1											1	1									1		
38			1											1						1		1									1								1							1										1
39				1				1																			1		1					1															1		1				1
40			1										1					1					1	1								1		1													1									
41		1	1									1							1										1											1											1		1			
42																						1			1				1		1	1					1						1										1			
43					1										1						1							1				1													1					1	1				
44	1				1				1					1																				1						1		1	1												
45			1	1																								1					1		1						1		1					1								
46	1																	1										1			1														1			1				1				1
47										1										1	1										1			1	1		1																1				
48			1						1												1							1										1												1				1	1		
49														1	1													1		1				1				1									1			1							
50				1					1										1												1		1				1	1							1												
51								1	1								1			1			1										1																		1			1			
52		1			1	1																		1							1	1		1															1							
53								1			1										1				1						1									1							1	1									
54							1	1		1									1					1			1															1			1											
55																								1					1								1			1				1									1		1	1
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

On remarque que non. Grâce à cela on peut mettre ces deux symboles sur la même carte. Puisqu'on a ajouté **UN** bonhomme de neige et **UNE** coccinelle, leurs nombres d'apparitions changent.

.	Bonhomme de neige	Coccinelle	Foudre	Bombe	Bouteille	Cible	Lunettes	Crane	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Clé	Clef	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Oeil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Coeur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Lèvres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8
	1	1																																																						
SOMME	7	8	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

Le symbole suivant est le crâne. On répète la même procédure, cette fois-ci, en utilisant le rouge.

.	Bonhomme de neige	Cocardie	Foudre	Bombe	Bouteille	Clés	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Cœ	Œf	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Oiseaux	Feu	Œil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Cœur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Lèvres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
1				1									1				1														1								1						1				1					1		
2														1										1	1	1									1	1													1				1		
3						1						1									1		1													1						1							1							1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																					
5	1		1			1	1										1								1												1															1				
6						1			1		1							1											1						1									1		1										
7							1				1																					1	1								1											1		1		1
8							1																							1				1				1		1			1		1				1	1						
9			1					1							1	1															1					1							1		1											
10																	1				1			1					1									1		1	1			1												
11						1										1				1						1	1					1							1	1																
12											1		1			1																					1		1				1					1		1						
13							1		1			1														1		1			1								1								1									
14	1												1						1		1	1				1							1											1												
15												1	1														1			1					1						1										1		1			
16					1			1				1						1				1															1				1														1		
17									1							1						1	1																									1		1		1	1			
18										1								1															1			1		1	1	1												1				
19															1		1	1								1				1													1										1			1	
20						1		1					1	1														1										1							1								1				
21	1			1							1	1			1					1				1														1																				
22							1								1							1	1												1					1					1				1								
23		1																		1																						1	1	1		1					1			1		
24																		1	1	1					1		1														1							1	1								
25	1																																			1				1					1	1			1		1	1				
26					1											1	1		1																1			1								1										1
27						1									1				1															1				1									1						1	1		
28			1		1					1	1															1																		1					1				1			
29					1		1						1							1									1							1												1							1	
30									1		1		1				1															1											1					1	1							
31				1		1			1													1																			1				1					1				1	
32												1			1						1		1								1									1												1			1	
33		1		1			1								1		1		1			1																																1		
34				1	1																		1		1		1											1					1								1				
35		1																					1			1											1	1			1				1		1								
36		1							1	1			1		1										1															1																1
37												1				1									1								1	1											1	1									1	
38			1											1							1	1								1									1							1										1
39				1				1																		1			1					1														1			1				1
40			1										1					1					1	1								1		1													1									
41		1	1									1							1										1										1											1		1				
42																						1			1				1		1	1					1					1											1			
43					1										1						1							1				1													1					1	1				
44	1				1				1					1																				1					1		1	1													
45		1	1																									1					1		1					1		1					1									
46	1																	1									1				1													1			1		1						1
47										1										1	1										1			1	1		1															1				
48			1						1												1							1										1											1					1	1	
49														1	1													1		1			1				1										1			1						
50				1					1										1												1		1			1	1								1											
51								1	1								1			1			1										1																	1			1			
52		1			1	1																		1							1	1		1															1							
53								1			1										1				1						1								1							1	1									
54							1	1		1									1					1				1														1			1											
55																								1					1								1		1				1										1		1	1
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

.	Bonhomme de neige	Cocardie	Foudre	Bombe	Bouteille	Clés	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Cœ	Œf	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Oiseaux	Feu	Œil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Cœur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Lèvres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8
	1	1						1																																																
SOMME	7	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

Le symbole suivant est le dinosaure. Après l'avoir souligné, on remarque que ce symbole est déjà apparu sur la même carte avec la coccinelle et le crâne. Mais il n'est pas apparu avec le bonhomme de neige.

.	Bonhomme de neige	Coccinelle	Foudre	Bombe	Bouteille	Clés	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fontaine	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Œil	Œuf	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Oeil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Ciseau	Voiture	Fromage	Coeur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Livres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
1				1									1				1														1								1						1				1				1			
2														1										1	1	1									1	1															1			1		
3						1						1									1		1													1							1						1							1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																					
5	1		1			1	1										1								1												1															1				
6						1			1		1							1											1						1									1		1										
7							1				1																					1	1									1										1		1		1
8							1																							1				1				1			1			1						1	1					
9			1					1							1	1															1					1							1		1											
10																	1				1			1					1										1		1	1			1												
11						1										1				1						1	1					1								1	1																
12											1		1			1																					1		1				1						1		1					
13							1		1			1														1		1			1								1									1								
14	1												1						1		1	1				1							1											1												
15												1	1														1			1					1							1									1		1			
16					1			1				1						1				1															1				1													1		
17									1							1						1	1																								1		1		1	1				
18										1								1															1			1		1	1	1											1					
19															1		1	1								1				1														1									1			1
20						1		1					1	1														1										1								1							1				
21	1			1							1	1			1						1			1														1																				
22							1								1							1	1												1					1					1				1							
23		1																			1																						1	1	1		1					1			1		
24																		1	1	1					1			1													1							1	1								
25	1																																			1				1					1	1		1				1	1			
26					1											1	1		1																1			1								1										1
27						1									1				1															1					1									1					1	1		
28			1		1					1	1															1																			1					1				1		
29					1		1						1							1									1							1												1							1	
30										1		1		1			1															1												1			1	1							
31				1		1				1												1																			1						1				1				1	
32											1			1						1			1								1									1											1				1	
33		1		1			1							1		1		1			1																																1		
34				1	1																		1		1		1											1					1								1				
35		1																					1			1											1	1			1				1		1								
36		1								1			1		1										1																1															1
37												1				1									1								1	1											1	1								1	
38			1											1						1		1								1								1								1										1
39				1				1																			1		1					1														1			1				1
40			1										1					1					1	1									1	1														1							
41		1	1									1							1										1										1												1		1			
42																						1			1				1	1	1						1						1										1		
43					1										1						1							1				1														1					1	1			
44	1				1				1					1																				1					1		1	1													
45			1	1																								1					1		1				1		1						1								
46	1																	1									1				1														1			1			1				1
47										1											1	1									1			1	1		1																1			
48			1						1													1					1											1											1					1	1	
49														1	1												1			1			1				1										1			1						
50				1					1											1											1		1			1	1								1											
51								1	1								1				1		1										1																		1			1		
52		1			1	1																		1						1	1		1																1							
53								1			1											1			1					1									1									1	1							
54							1	1		1									1					1			1																1			1										
55																								1					1								1			1				1									1		1	1
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

Comme le dinosaure n'est pas apparu avec le bonhomme de neige, on peut créer une autre carte qui contient le bonhomme de neige et le dinosaure.

.	Bonhomme de neige	Coccinelle	Foudre	Bombe	Bouteille	Clés	Lunettes	Crâne	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fontaine	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Œil	Œuf	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Oeil	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Ciseau	Voiture	Fromage	Coeur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Livres	Point d'exclamation	Yin yang	Stop	Zèbre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
SOMME	6	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8
		1	1					1																																																
		1								1																																														
SOMME	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

En utilisant cette méthode, on a réussi à créer deux nouvelles cartes qui vérifient les règles de l'ensemble de Dobble. En plus, l'ensemble obtenu est parfait - tous les symboles apparaissent 8 fois.

	Bonhomme de neige	Coccinelle	Foudre	Bombe	Bouteille	Clé	Lunettes	Oeil	Dauphin	Dinosaure	Dobble	Arbre	Fantôme	Igloo	Pomme	Cactus	Clown	Clé	Clef	Cadenas	Trèfle	Cheval	Cube de glace	Chat	Ancre	Goutte	Lune	Fleur	Feuille	Homme	Carotte	Marteau	Ciseaux	Feu	Gel	Crayon	Araignée	Toile d'araignée	Chien	Peinture	Oiseau	Voiture	Fromage	Cœur	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bougie	Lèvres	Point d'exclamation	Voyang	Stop	Zébre	Horloge	Point d'interrogation	Ampoule	Tortue
SOMME	8	7	8	8	8	8	8	7	8	7	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	7	8	7	8	8	7	8	8	8	7	8	8	8	8	8	8	8	8	8	7	8	8	8	8	7	7	8

	1	1						1																								1			1				1											1						1	
	1									1						1							1					1	1	1																									1		
SOMME	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8	8

Comme on a réussi à ajouter deux cartes à l'ensemble original de Dobble, on constate que **l'ensemble original de Dobble n'est pas maximal.**

L'ensemble obtenu

Dans l'ensemble obtenu:

- **s** = 57
- **k** = 8
- **n** : a changé de 55 à 57
- l'ensemble obtenu est parfait, **r** = 8
- l'ensemble obtenu est maximal (démonstration – point 4)

***

3.2 On enlève des cartes

Notre deuxième modification consiste à enlever toutes les cartes qui contiennent le bonhomme de neige. On l'a choisi parce que c'est un symbole qui n'apparaît que 6 fois. La SOMME dans le tableau ci-dessous ne contient pas les cartes enlevées, c'est-à-dire des cartes numéro 5, 14, 21, 25, 41 et 46.

-	Bonhomme de neige	Cocotte	Feuille	Bonbon	Bouteille	Clé	Lunettes	Gâteau	Dauphin	Brosse à dents	Bobble	Arbre	Fantôme	Kiwi	Pomme	Cactus	Clown	Lit	Ver	Cadeau	Tête	Cheval	Tube de peinture	Oeuf	Moyen	Couteau	Arbre	Fleur	Feuille	Hérisson	Canard	Marteau	Dinosaure	Feu	Doll	Crayon	Aquarium	Train d'autrefois	Chien	Pelleteuse	Cisaille	Voiture	Fromage	Gant	Soleil	Dragon	Flocon de neige	Bouche	Lettres	Point d'exclamation	Pinceau	Stop	Poker	Horloge	Point d'interrogation	Aiguille	Tortue
1				1									1				1														1					1					1						1						1			1		
2															1										1	1	1								1	1															1					1		
3						1						1									1		1													1								1						1							1
4		1									1						1					1					1	1						1		1																						
5	1		1			1	1										1								1												1																1					
6						1			1		1							1											1						1									1			1										
7							1				1																					1	1									1											1		1		1
8							1																							1				1				1			1			1						1	1						
9			1					1							1	1															1					1						1		1														
10																	1				1			1					1										1		1	1			1												
11						1										1				1						1	1					1								1	1																	
12										1		1				1																					1		1				1					1		1							
13							1		1			1														1		1			1								1										1									
14	1												1						1		1	1				1						1													1												
15											1	1															1			1					1							1									1		1				
16					1			1			1							1				1															1				1															1		
17									1							1						1		1																								1		1		1	1				
18										1								1														1				1		1	1	1												1					
19															1		1	1								1				1													1										1			1	
20						1		1					1	1														1										1								1								1				
21	1			1							1	1			1					1				1														1																				
22							1								1							1	1												1						1					1				1							
23		1																		1																				1				1	1	1		1				1			1		
24																		1	1	1					1			1														1								1	1					
25	1																																			1					1					1	1		1			1	1			
26					1											1	1		1																1			1										1								1
27						1									1				1															1					1										1					1	1		
28			1		1					1	1															1																			1					1			1			
29					1		1						1							1									1							1												1								1	
30										1		1		1			1															1													1			1	1								
31				1		1				1												1																					1					1				1				1	
32											1			1					1				1								1										1											1				1	
33		1		1			1							1		1		1			1																																	1			
34				1	1																		1		1		1											1					1								1					
35		1																					1			1											1	1				1				1		1								
36		1							1	1			1		1										1																1																1
37												1				1									1								1	1											1	1										1	
38			1											1						1		1								1										1						1										1
39				1				1																		1			1					1															1			1				1
40			1										1					1					1	1								1		1														1								
41		1	1									1							1										1											1											1		1			
42																						1			1				1		1	1					1						1											1		
43					1										1						1							1				1														1					1	1				
44	1				1				1					1																				1						1		1														
45			1	1																								1					1		1						1		1					1								
46	1																	1									1				1														1			1			1					1
47										1										1	1										1			1	1		1																1				
48			1						1												1						1											1										1						1	1	
49														1	1												1		1				1				1										1			1							
50				1					1										1											1		1				1	1							1												
51								1	1								1			1			1										1																		1			1			
52		1			1	1													1					1						1	1		1															1							
53								1			1										1				1					1										1								1	1							
54							1	1		1									1					1			1																	1					1							
55																								1					1							1				1					1								1		1	1
SOMME	0	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7	7

L'ensemble obtenu

Dans l'ensemble obtenu :

- **s** : a changé de 57 à 56
- **k** = 8
- **n** : a changé de 55 à 49
- l'ensemble obtenu est parfait, **r** = 7
- l'ensemble obtenu est maximal (démonstration – point 4) !!!

***

4. Maximalité des ensembles de Dobble

Notations :

- a, b, c, ... : cartes dans l'ensemble de cartes
- A, B, C, D, ... : symboles
- $r_{(A)}$: nombre d'apparitions du symbole A dans l'ensemble
- a_{-A} : carte « a » avec tous ses symboles sauf le symbole A

On considère les cartes comme des ensembles de symboles. Par exemple, si la carte « a » contient les symboles A, B, C et D, on écrit cette information de la manière suivante:

$$a = \{A, B, C, D\}$$

Par conséquent : $a_{-A} = \{B, C, D\}$

4.1 Inéquation importante

On voit ci-dessous les trois cartes qui composent un ensemble de Dobble. « A » est un symbole commun pour toutes les cartes, s = 10, k = 4.

a = {A, B, C, D}, b = {A, E, F, G}, c = {A, H, I, J}

symboles → / cartes ↓	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
a	1	1	1	1						
b	1				1	1	1			
c	1							1	1	1

Les ensembles a_{-A}, b_{-A} et c_{-A} sont disjoints*
Leur réunion: $a_{-A} \cup b_{-A} \cup c_{-A} = \{B, C, D, E, F, G, H, I, J\}$ – 9 éléments

* Dans l'ensemble de Dobble, chaque couple de cartes possède exactement un symbole commun. Par conséquent les ensembles des cartes contenant le symbole A restent disjoints deux à deux, après avoir enlevé ce symbole.

Conclusion 1 :

Pour chaque ensemble de Dobble et chaque symbole A on a : $1 + r_{(A)} \cdot (k-1) \leq s$.

<u>Démonstration :</u>

On va compter tous les symboles qui se trouvent sur toutes les cartes contenant le symbole A.

On obtient : $1 + r_{(A)} \cdot (k-1)$

Symbole A

On a $r_{(A)}$ cartes, (k-1) symboles sur chaque carte et on sait que le symbole A est le seul symbole commun sur chaque couple des cartes. Alors cette multiplication représente le nombre de tous les symboles sauf A qui sont apparus sur les cartes contenant aussi le symbole A.

Conclusion 2 :

Autrement dit, l'ensemble vérifiant l'inéquation $1 + r_{(A)} \cdot (k-1) > s$ n'est pas un ensemble de Dobble.

Exemple 1:

a={A,B,C,D}, b={A, E, F, G}, c={A,H,I,J}

s = 10, **k** = 4, $\mathbf{r_{(A)}}$ = 3

<u>Vérification de l'inéquation:</u>

$1 + r_{(A)} \cdot (k-1) \leq s \quad <=> \quad 1 + 3 \cdot (4-1) \leq 10$

$10 \leq 10$

Exemple 2:

symboles → / cartes ↓	A	B	C	D	E	F	G	H	I
a	1	1	1	1					
b	1				1	1	1		
c			1				1	1	1

s = 9, **k** = 4, $\mathbf{r_{(A)}}$ = 2

a = {A, B, C, D}, b = {A, E, F, G}, c = {C, G, H, I}

La réunion des ensembles « sans le symbole A » (on tient en compte seulement les cartes « a » et « b » parce que le symbole A n'apparaît pas sur la carte « c ») :

$a_{-A} \cup b_{-A}$ = {B, C, D, E, F, G} – 6 éléments

<u>Vérification de l'inéquation:</u>

$1 + r_{(A)} \cdot (k-1) \leq s \quad <=> \quad 1 + 2 \cdot (4-1) \leq 9$

$7 \leq 9$

4.2 Maximalité des ensembles de Dobble

Théorème :

L'ensemble parfait de Dobble, avec le nombre d'apparition de symboles **r,** vérifiant l'inéquation

$1 + (r+1) \cdot (k-1) > s$, est un ensemble maximal.

Démonstration (par l'absurde):

Si cet ensemble n'est pas maximal, il est possible d'ajouter une nouvelle carte à l'ensemble, en utilisant seulement les symboles qui sont déjà dans l'ensemble **S**. L'ensemble obtenu reste un ensemble de Dobble.

Donc si on crée une nouvelle carte, avec des symboles de l'ensemble S, chacun des **k** symboles qui est présent sur cette nouvelle carte apparaît maintenant dans tout l'ensemble **r**+1 fois (et pas **r** fois comme avant).

Si, pour l'ensemble avec une carte ajoutée, on considère comme le symbole A l'un des symboles qui apparaissent sur la nouvelle carte, on a alors $r_{(A)} = r+1$. L'ensemble élargi était un ensemble de Dobble, alors, d'après la conclusion 1, on a : $1 + (r+1) \cdot (k-1) \leq s$.

Et cela est contradictoire avec l'hypothèse de départ.

De cette manière on constate que notre ensemble est maximal.

c.q.f.d.

4.3 Application du théorème

On applique le théorème pour les ensembles parfaits qu'on connaît (voir : point 3).

	L'ensemble de Dobble avec 2 cartes ajoutées	L'ensemble de Dobble sans le bonhomme de neige
$1 + (r+1) \cdot (k-1) =$	64	57
$1 + (r+1) \cdot (k-1) > s$?	Oui, 64>57	Oui, 57>56

Conclusion:

D'après le théorème, les deux ensembles ne sont pas seulement parfaits mais aussi **maximaux**.

***

5. Présentation de la méthode de construction d'ensembles de Dobble

Chaque ensemble de Dobble doit respecter la règle suivante: deux cartes quelconques du jeu de Dobble ont toujours un seul symbole commun et il y a le même nombre de symboles sur toutes les cartes.

On prépare un ensemble de la manière suivante:

1) choisir le nombre de tous les symboles : **s**
2) choisir le nombre de symboles sur une carte : **k**
3) créer la première carte
4) ajouter une carte suivante (jusqu'au moment où on ne pourra ajouter aucune carte sans changer le nombre de symboles : **s**)

On doit maintenant résoudre le problème suivant: comment ajouter une carte suivante à l'ensemble pour que l'ensemble obtenu soit un ensemble de Dobble (à condition que ce soit possible bien sûr).

Notations dont on a besoin pour bien comprendre la suite:

- A, B, C, D, E... : les symboles
- Z : l'ensemble de tous les <u>numéros</u> de cartes déjà créées
- Z_A : l'ensemble de tous les numéros de cartes qui contiennent le symbole « A »

On voit ci-dessous les trois premières cartes d'un ensemble où k=4 et s=13.

A, B, C... : ce sont les symboles.
1, 2, 3... : ce sont les numéros de cartes.
Pour toutes les cartes déjà créées le symbole commun est B.

À droite il y a des ensembles. On voit que, l'ensemble Z_A est un singleton et il contient seulement la première carte. Cela veut dire que le symbole A n'apparaît que sur la première carte. Ensuite, le symbole B apparaît sur les cartes 1, 2, et 3, donc les valeurs dans l'ensemble Z_B sont 1, 2 et 3, etc.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	X	X	X									
2		X			X	X	X						
3		X						X	X	X			
4													
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
...													

$Z_A = \{1\}$

$Z_B = \{1, 2, 3\}$

$Z_C = \{1\}$

$Z_D = \{1\}$

$Z_E = \{2\}$

$Z_F = \{2\}$

$Z_G = \{2\}$

$Z_H = \{3\}$

$Z_I = \{3\}$

$Z_J = \{3\}$

$Z_K = \emptyset$

$Z_L = \emptyset$

$Z_M = \emptyset$

Pour construire une carte suivante, on doit choisir parmi les ensembles ci-dessus k ensembles tels que :

1) La réunion de ces ensembles doit contenir tous les numéros des cartes déjà existantes (pour nous ce sont en ce moment 1, 2, 3). (1)
2) Les ensembles choisis doivent être tous disjoints deux à deux. On ne peut pas choisir par exemple l'ensemble Z_A et Z_B à la fois parce que 1 appartient à l'ensemble Z_A et également à l'ensemble Z_B. (2)

Maintenant on va créer la carte suivante. On a choisi les ensembles Z_D, Z_F, Z_H et Z_K, en accord avec les règles que leur réunion doit contenir tous les numéros de cartes déjà existantes et que les ensembles doivent être disjoints.

Deux règles

1) $Z_D \cup Z_F \cup Z_H = \{1, 2, 3\}$
2) $Z_D \cap Z_F = \emptyset$
   $Z_D \cap Z_H = \emptyset$
   $Z_F \cap Z_H = \emptyset$

Pour créer la carte suivante, on choisit donc les symboles D, F, H et aussi K, qui n'était pas encore utilisé.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	X	X	X									
2		X			X	X	X						
3		X						X	X	X			
4				X		X		X			X		
5													
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
...													

$Z_A = \{1\}$

$Z_B = \{1, 2, 3\}$

$Z_C = \{1\}$

$Z_D = \{1, \mathbf{4}\}$

$Z_E = \{2\}$

$Z_F = \{2, \mathbf{4}\}$

$Z_G = \{2\}$

$Z_H = \{3, \mathbf{4}\}$

$Z_I = \{3\}$

$Z_J = \{3\}$

$Z_K = \mathbf{\{4\}}$

$Z_L = \emptyset$

$Z_M = \emptyset$

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	X	X	X									
2		X			X	X	X						
3		X						X	X	X			
4				X		X		X			X		
5	X				X				X		X		
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
...													

$Z_A = \{1, \mathbf{5}\}$

$Z_B = \{1, 2, 3\}$

$Z_C = \{1\}$

$Z_D = \{1, 4\}$

$Z_E = \{2, \mathbf{5}\}$

$Z_F = \{2, 4\}$

$Z_G = \{2\}$

$Z_H = \{3, 4\}$

$Z_I = \{3, \mathbf{5}\}$

$Z_J = \{3\}$

$Z_K = \{4, \mathbf{5}\}$

$Z_L = \emptyset$

$Z_M = \emptyset$

La manière de la création des cartes suivantes est toujours la même. Maintenant on crée la carte numéro 5. On utilise les symboles A, E, I et K. Avant l'ajout de la carte 5, les ensembles Z_A, Z_E, Z_I et Z_K étaient disjoints deux à deux et leur réunion se composait de 1, 2, 3, 4.

Il faut remarquer que ce choix de quatre symboles n'est pas la seule possibilité, il y en a beaucoup plus.

Une autre carte 5 est présentée ci-dessous. Dans ce cas on a choisi les symboles C, E, H et aussi L, qui n'a pas encore été utilisé. On peut le faire parce qu'on se voit bien que les ensembles Z_C, Z_E, Z_H et Z_L vérifient les conditions (1) et (2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	X	X	X									
2		X			X	X	X						
3		X						X	X	X			
4				X		X		X			X		
5			X		X			X				X	
6													
7													
8													
9													
10													
11													
12													
13													
14													
15													
...													

$Z_A = \{1\}$

$Z_B = \{1, 2, 3\}$

$Z_C = \{1, \mathbf{5}\}$

$Z_D = \{1, 4\}$

$Z_E = \{2, \mathbf{5}\}$

$Z_F = \{2, 4\}$

$Z_G = \{2\}$

$Z_H = \{3, 4, \mathbf{5}\}$

$Z_I = \{3\}$

$Z_J = \{3\}$

$Z_K = \{4\}$

$Z_L = \mathbf{\{5\}}$

$Z_M = \emptyset$

On continue le même procédé tant qu'il est possible de créer une carte suivante.

Le tableau suivant représente l'ensemble terminé. On ne peut pas trouver quatre ensembles vérifiant les conditions (1) et (2).

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M
1	X	X	X	X									
2		X			X	X	X						
3		X						X	X	X			
4				X		X		X			X		
5			X		X			X				X	
6	X					X			X			X	
7				X	X				X				X
8	X						X	X					X
9		X									X	X	X
10			X				X		X		X		
11				X			X			X		X	
12	X				X					X	X		
13			X			X				X			X
14													
15													
...													

$Z_A = \{1, 6, 8, 12\}$

$Z_B = \{1, 2, 3, 9\}$

$Z_C = \{1, 5, 10, 13\}$

$Z_D = \{1, 4, 7, 11\}$

$Z_E = \{2, 5, 7, 12\}$

$Z_F = \{2, 4, 6, 13\}$

$Z_G = \{2, 8, 10, 11\}$

$Z_H = \{3, 4, 5, 8\}$

$Z_I = \{3, 6, 7, 10\}$

$Z_J = \{3, 11, 12, 13\}$

$Z_K = \{4, 9, 10, 12\}$

$Z_L = \{5, 6, 9, 11\}$

$Z_M = \{7, 8, 9, 13\}$

Au lieu de vérifier toutes les possibilités (il y en a beaucoup) on peut vérifier la maximalité de cet ensemble en se servant de notre théorème du point 4.2. On peut s'en servir parce que l'ensemble de Dobble obtenu est parfait – chaque symbole apparait 4 fois (**r** = 4).

Vérification de maximalité (r=4, k=4, s=13):

$1 + (r+1) \cdot (k-1) =$	16
$1 + (r+1) \cdot (k-1) > s$?	Oui, 16>13

D'après le théorème du point 4.2, l'ensemble qu'on a créé est maximal.

L'ensemble obtenu (3)

Dans l'ensemble obtenu :

- **s** = 13
- **k** = 4
- **n** = 13
- l'ensemble obtenu est parfait
- l'ensemble obtenu est maximal

Merci beaucoup d'avoir lu les résultats de notre recherche. Nous espérons que le sujet vous a intéressé. Naturellement, nous avons découvert seulement une partie des propriétés du jeu de Dobble et nous sommes sûrs qu'il y en a beaucoup plus.

***

Bibliographie:

image (page 1): http://www.boardgamehub.co.za/2015/07/21/dobble/

Notes d'édition

(1) Cette condition garantira qu'à chaque étape la nouvelle carte a bien un symbole commun avec chacune des précédentes.
Remarque : la réunion de ces ensembles est en fait automatiquement égale aux numéros des cartes déjà existantes.

(2) Cette condition garantit qu'à chaque étape la nouvelle carte a au plus un symbole commun avec les autres cartes : si on choisissait Z_A et Z_B la nouvelle carte auraient les symboles A et B en commun avec la carte numéro 1.
Les deux conditions ensemble garantissent donc qu'à chaque étape on a bien un ensemble de Dobble.

(3) Remarque : la méthode ne fournit pas de moyen pour trouver explicitement la carte à rajouter. Lorsque beaucoup de symboles sont en jeu, une recherche exhaustive peut être pénible... De manière générale, lorsqu'on ne peut plus continuer cette méthode, on a forcément un ensemble maximal, puisqu'on ne peut pas rajouter de carte. Mais un ensemble maximal n'est pas forcément parfait, donc prouver qu'on ne peut plus continuer peut ne pas être facile.