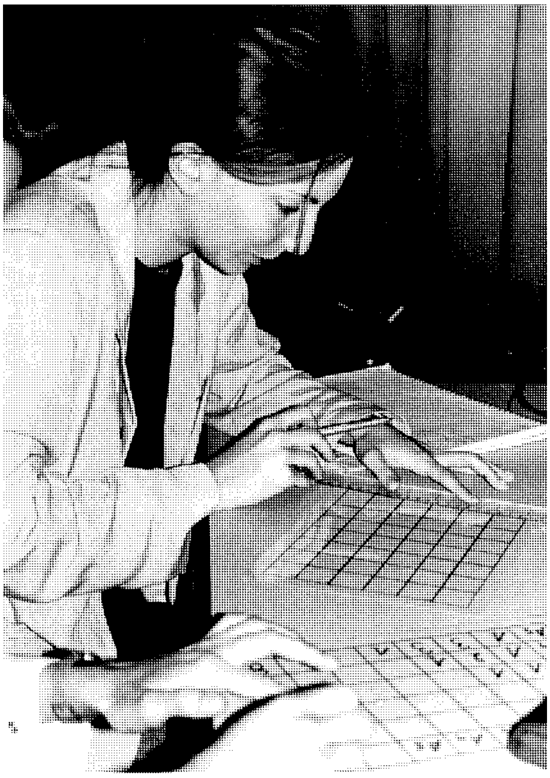
découpage d’un cercle en régions

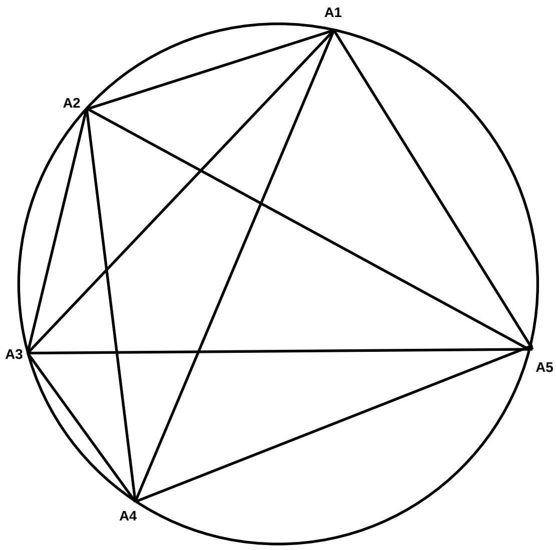
par Elisabeth Lasalle, Chloé Ragueneau, élèves de Tle C, lycée La Fontaine (Paris 16[ème])

enseignants : Ghislaine Gaudemet et Jean Rouquette

chercheur : Alain Pajor



A partir d’un nombre donné n de points placés sur un cercle déterminer en fonction de n le nombre [maximum] de surfaces créées à l’intérieur du cercle lorsque l’on relie tous les points du cercle.



• une zone est déterminée par 3 arêtes au moins
• une arête est déterminée par 2 points distincts
• un point est déterminé par 4 arêtes

Démonstration [NDLR : de quoi ?]

		A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8	A_9	A_{10}
S_{n-1}	A_1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
S_{n-2}	A_2		X	1	2	3	4	5	6	7	8
S_{n-3}	A_3			X	1	3	5	7	9	11	13
	A_4				X	1	4	7	10	13	16
	A_5					X	1	5	9	13	16
	A_6						X	1	6	11	16
	A_7							X	1	7	13
	A_8								X	1	8
S_1	A_9									X	1
S_0	A_{10}										X
		1	1	2	4	8	15	26	42	64	93
		1	2	4	8	16	31	57	99	163	256

[NDLR : explications pour lire le tableau, que les élèves n’ont pas données : dans chaque colonne, on indique le nombre de régions supplémentaires quand on ajoute un sommet. Par exemple, avec A_5 : A_5A_1 crée une région nouvelle, A_5A_2 crée trois régions nouvelles … au total 8 régions (avant dernière ligne) qui s’ajoutent aux 8 régions déjà obtenues avec 4 points. Le total général (pour n = 10) est obtenu dans la dernière case, en bas à droite du tableau.]

On remarque que le tableau est constitué sur chaque ligne de suites arithmétiques S_N finies de **raison *r*** et d'un **nombre de termes *N***.

N : nombre de termes dans une suite
r : raison d'une suite

La somme des N termes u_1, u_2 … u_N d'une suite arithmétique S_N vaut :

$$S_N = \frac{N}{2}\left(u_1 + u_N\right)$$

Or quelque soit S_N,

$$u_1 = 1$$
$$u_N = u_1 + (N - 1)r$$

d'où :

$$S_N = \frac{N}{2}\left(2 + (N - 1)\,r\right)$$

d'où

$$S_N = N + \frac{N \times (N - 1)\,r}{2}$$

Pour chacune de ces suites on a : $r = n - N - 1$. D'où :

$$S_N = N + \frac{N\,(n - N - 1)\,(N - 1)}{2}$$
$$= \frac{n\,(N^2 - N) - N^3 + 3\,N}{2}$$

Il s'agit alors de calculer la somme de toutes les sommes de termes des suites S_N. Il y a $(n - 1)$ suites dont le nombre de termes constitue une suite arithmétique.

$$\sum S_N = S_{n-1} + S_{n-2} + \ldots + S_3 + S_2 + S_1$$

$$2\sum S_N = n\left[\left((n-1)^2 + \ldots + 2^2 + 1^2\right) - \left((n-1) + \ldots + 2 + 1\right)\right]$$
$$- \left((n-1)^3 + \ldots + 2^3 + 1^3\right)$$
$$+ 3\left((n-1) + \ldots + 2 + 1\right)$$

$$\sum S_N = \frac{n^4 - 6\,n^3 + 23\,n^2 - 18\,n}{24}$$

Or le cercle constitue en lui-même une zone créée par aucun point $\Rightarrow$ Nombre de zones = $\sum S_N + 1$

$$\textbf{Nbre de zones} = \frac{\mathbf{n}^4 - 6\,\mathbf{n}^3 + 23\,\mathbf{n}^2 - 18\,\mathbf{n}}{24} + 1$$

[NDLR : Cette suite de nombres est trompeuse : 1, 2, 4, 8, 16, … puis 31 (et non 32) ! En fait, on peut arriver à la formule en utilisant :

1) les remarques faites par les élèves (un point d'intersection est déterminé par deux cordes du cercle donc par quatre points sur le cercle) ;

2) la formule d'Euler pour les cartes planes :

$$(R + 1) - L + P = 2$$

$R + 1$: nombre total de régions ou "faces", le "+ 1" correspondant à la région extérieure au cercle
L : nombre de lignes (partie de corde joignant deux points particuliers de la figure)
P : nombre de points particuliers (sur le bord du cercle ou à l'intérieur)

3) le nombre de lignes est calculable aisément.

En remarquant que chaque point intérieur est l'extrémité de 4 lignes, et que chaque point du bord est l'extrémité de $n + 1$ lignes, on trouve :

$$R = \binom{n}{4} + \binom{n}{2} + 1$$
$$= \frac{n\,(n-1)\,(n-2)\,(n-3)}{24} + \frac{n\,(n-1)}{2} + 1 \text{]}$$