

à la quête du disque perdu ...

Géométrie non-euclidienne : le "Disque Jean".

par Nathalie BELLINO, Laurent DANDRES,
Frédéric MAHÉ, Lionel SIMONOT,
Chloé VIATTE

Lycée Jean Racine, 20 rue du Rocher, 75008 Paris
Lycée Georges Braque, 21 rue Victor Puiseux,
95104 Argenteuil Cédex

Nous avons essayé de réaliser
une géométrie non-euclidienne,
différente de la
géométrie traditionnelle.

Nous nous sommes, pour cela,
inspirés des assiettes
du dessinateur Escher.

Nous avons l'impression qu'il y a une
fuite vers l'infini lorsque nous nous
approchons des bords.

Ce qui paraît fini est en fait
délimité par un cercle.

Notre géométrie a pour support un
disque, appelé "Disque Jean",
de centre O et de rayon 2 dans
un repère orthonormal.

Tous les éléments de notre géométrie,
c'est-à-dire les points,
sont situés dans ce disque.

Ce sont les distances qui font de notre
géométrie une géométrie différente de celle que
l'on a l'habitude d'étudier :

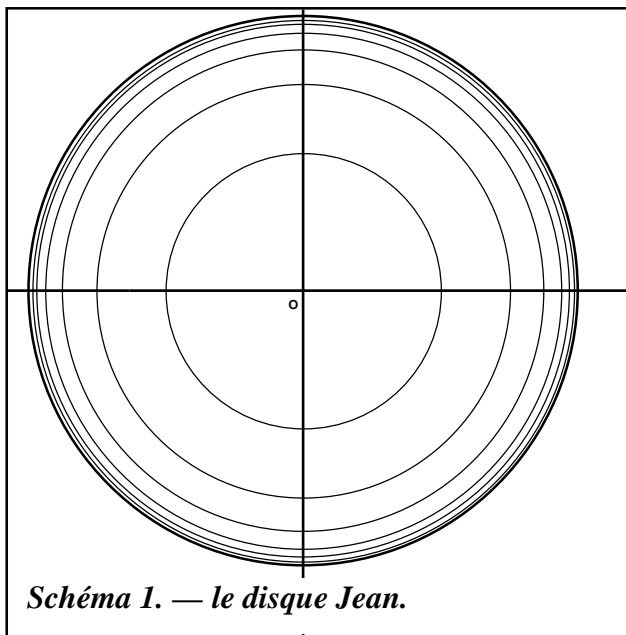


Schéma 1. — le disque Jean.

Prenons le disque de centre O et de rayon
 $R_1 = 1$; prenons ensuite une suite de disques
concentriques de centre O et de rayons
 R_n définie par la suite :

$$R_1 = 1 = 2 - \frac{1}{2^0}$$

$$R_2 = 1 + \frac{1}{2} = 2 - \frac{1}{2^1}$$

$$R_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = 2 - \frac{1}{2^2}$$

etc ... Posons alors la suite :

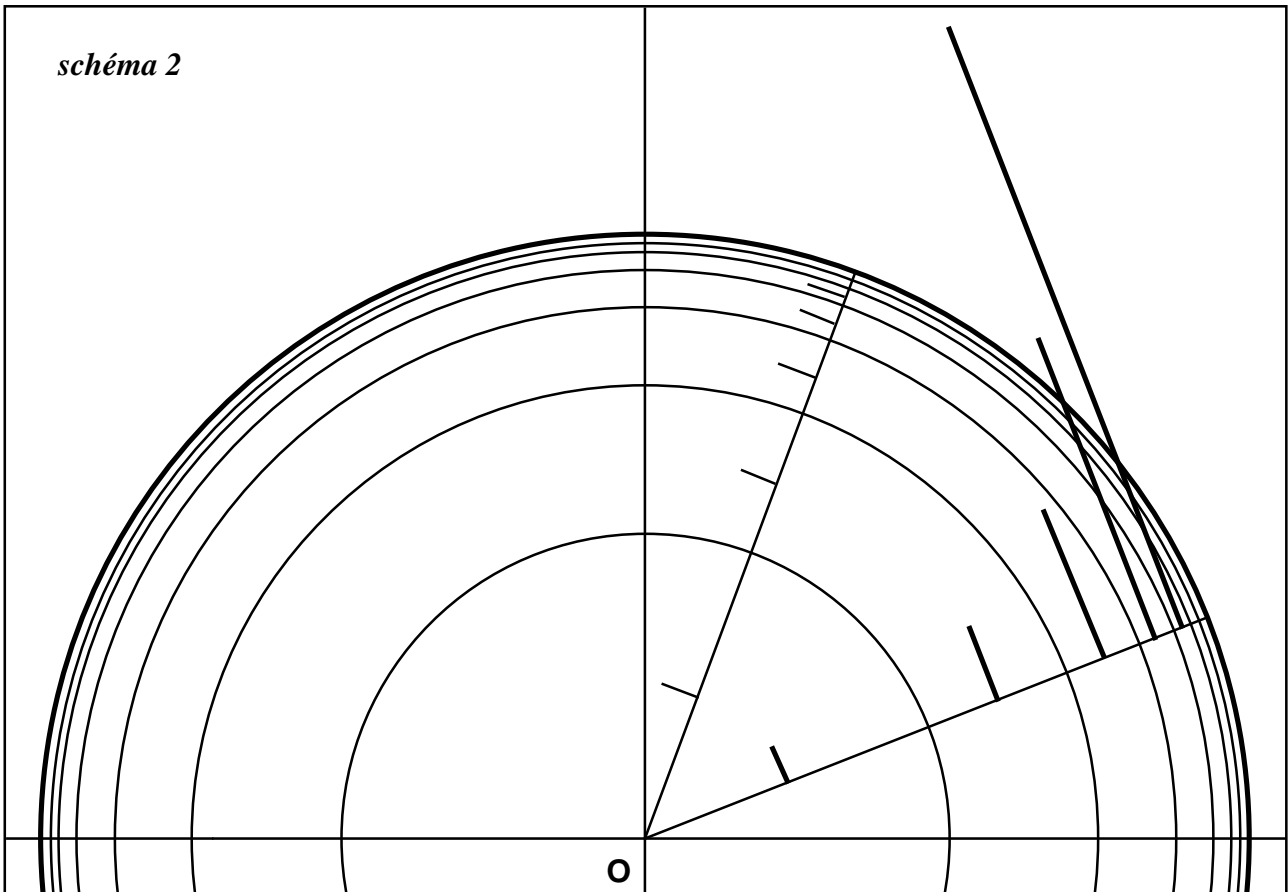
$$R_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^{n-1}} = 2 - \frac{1}{2^n}$$

Nous remarquons que le disque D_n (de rayon
 R_n et de centre O), lorsque n tend vers $+\infty$, tend
à devenir le disque Jean car R_n tend vers 2.

Nous définissons la distance observée
comme étant celle qui se voit à l'œil nu et la
distance calculée, la distance déterminée à
partir de la distance mesurée par un coefficient
de proportionnalité $c(M)$:

$$c(M) = \frac{\text{distance calculée}}{\text{distance observée}}$$

Nous avons symbolisé la distance calculée
par les règles épaisses et la distance observée
par les règles fines (voir schéma 2).



On définit : $c(M)_n = 2^n$. C'est dû à la différence de concentration des zones. Une zone étant une partie du disque délimitée par deux cercles de rayons R_n et R_{n+1} , de centre O, la règle de la distance observée à l'intérieur d'une zone est invariante ; mais quand on passe dans des zones à coefficients plus élevés, la distance calculée augmente, et le chemin parcouru est plus long.

Toute notre étude consiste en la recherche des géodésiques dans notre géométrie : *le plus court chemin entre deux points distincts*.

Pour visualiser le problème, on pourra dire que le chemin le plus court est celui pour lequel nous mettons le moins de temps — à énergie constante. Par exemple : dans la géométrie euclidienne, il s'agit d'un segment de droite ; dans une géométrie définie sur une sphère, il s'agit d'un arc de grand cercle passant par ces deux points.

Ainsi, dans notre géométrie, à énergie constante, on a intérêt à passer le plus de temps dans le milieu où la distance calculée est la plus courte, donc vers le centre.

On peut alors travailler dans deux optiques divergentes :

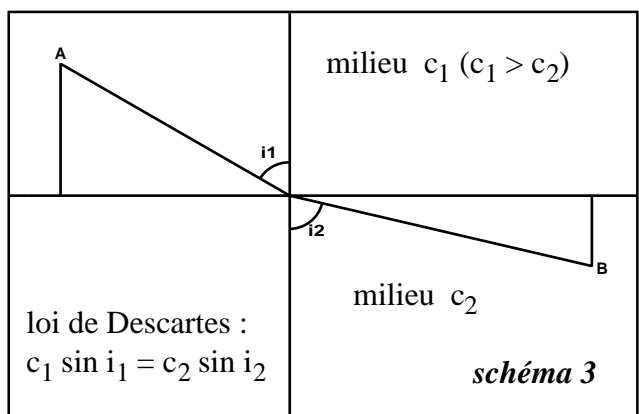
— soit les zones définies précédemment sont homogènes, c'est-à-dire que la règle ne varie pas à l'intérieur de la zone ;

— soit la progression dans les distances ne se fait plus de manière « hachée » mais progressivement à l'intérieur du disque.

Les zones sont homogènes.

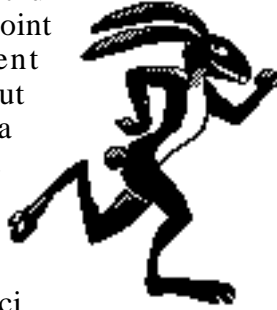
Nous allons chercher à résoudre notre problème de géodésiques en nous appuyant sur les lois de l'optique, et nous allons d'abord simplifier le problème en prenant comme frontière ***une droite*** — au lieu d'un cercle.

Appliquons le principe de réfraction (schéma 3).



Afin de rendre plus clair ce dessin, nous allons imaginer que dans le milieu de “concentration” c_1 (ce qui correspond à nos coefficients) il y ait de la luzerne, et que le milieu c_2 soit composé de trèfle.

Au point A apparaît un lapin. S'il veut aller au point B le plus rapidement possible, notre lapin a tout intérêt à sortir de la luzerne qui le ralentit considérablement.



Cependant, il ne faut pas qu'il s'éloigne trop non plus du point B. Voici le résultat que nous obtenons :

$$c_1 \sin i_1 = c_2 \sin i_2$$

ce qui correspond à une loi de Descartes.

Distinguons ce cas particulier : si le rayon lumineux arrive perpendiculairement à la droite frontière, il n'est pas dévié.

A présent, nous allons appliquer cette propriété à plusieurs zones séparées par des frontières droites (voir schéma 4). C'est le phénomène des mirages.

A chaque fois que le rayon lumineux arrive sur une frontière, émergent un rayon réfracté et un rayon réfléchi. Au début, le rayon réfracté est dominant. Mais à un moment, le rayon réfracté tend vers l'horizontale et le rayon réfléchi l'emporte ; puis ce même rayon subit enfin de nouvelles réfractions.

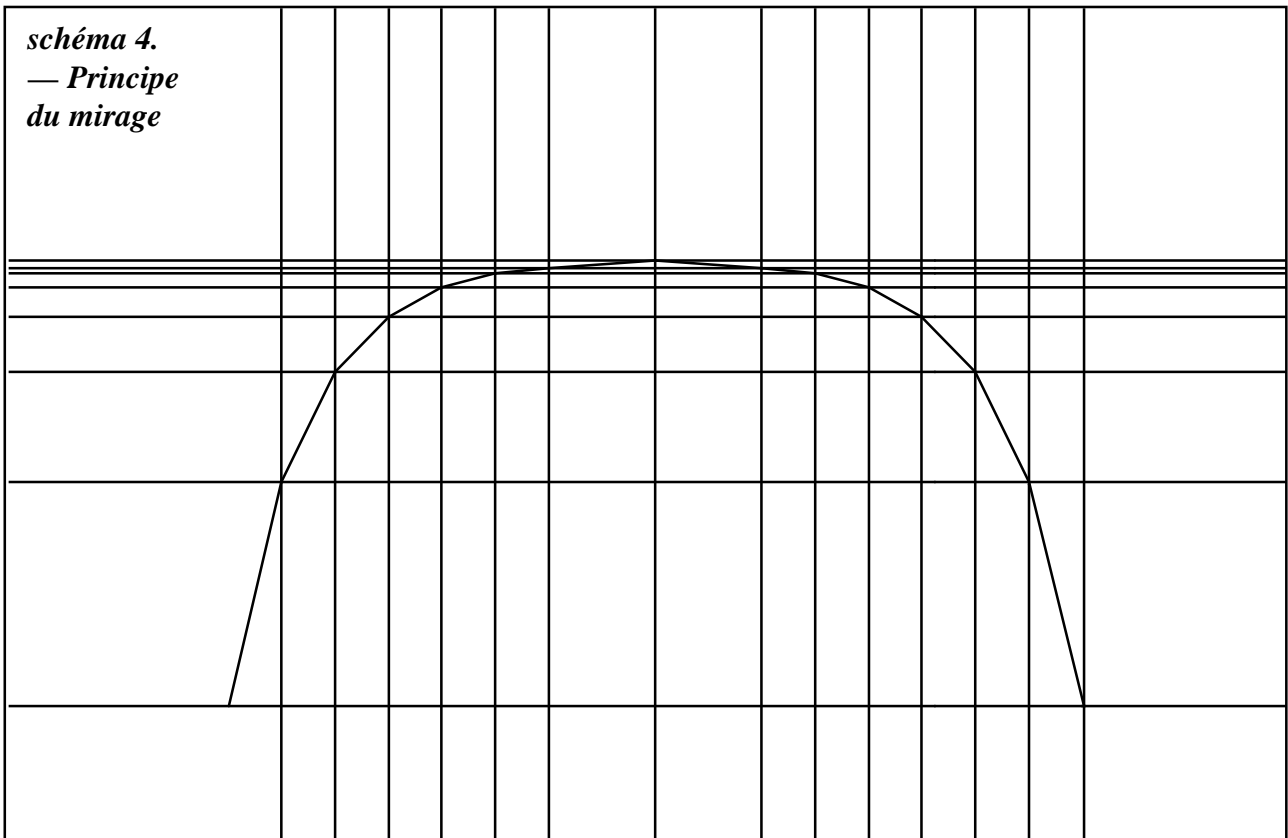
Notre géométrie étant avant tout une invention, nous pouvons — pourquoi pas ? — nous inspirer de cette étude pour notre Disque Jean. En effet, les lois de Descartes valent aussi pour des courbes quelconques, à condition d'utiliser les tangentes (voir schéma 5).

Il existe trois types de chemins parcourus par la lumière dans notre disque :

- si le rayon lumineux est perpendiculaire à la tangente au cercle extérieur, alors c'est un segment de droite passant par le centre ;

- si le rayon lumineux est tangent au cercle, il se “bloque” au point d'intersection avec le cercle ;

- et dans les autres cas, nous pouvons considérer que le chemin le plus court entre deux points distincts est un ensemble de droites brisées ou plutôt de droites qui se brisent à chaque fois qu'elles rencontrent une frontière. Ce chemin a tendance à aller plutôt vers les zones à faibles coefficients, donc vers le centre.



La progression des distances est continue.

Dans cette hypothèse, nous avons cherché à transformer des systèmes que nous connaissions déjà pour obtenir notre propre géométrie. Nous avons donc réalisé des transformations géométriques (inversions) et complexes.

Mais les résultats obtenus n'étaient probablement pas des géodésiques. En effet, les transformées de géodésiques de systèmes connus ne sont pas forcément les géodésiques de notre géométrie.

Par contre, on pourrait à partir de ce schéma (schéma 5) considérer que la progression des distances est continue. Nous n'obtenons plus des droites brisées mais une courbe qui ressemble à un arc de cercle, sauf si le rayon est perpendiculaire au Disque Jean, auquel cas il s'agit d'un segment de droite.

En plus d'être mathématique, cette étude est philosophique. C'est une reformulation du paradoxe d'Achille qui n'arrive jamais à rattraper la tortue.

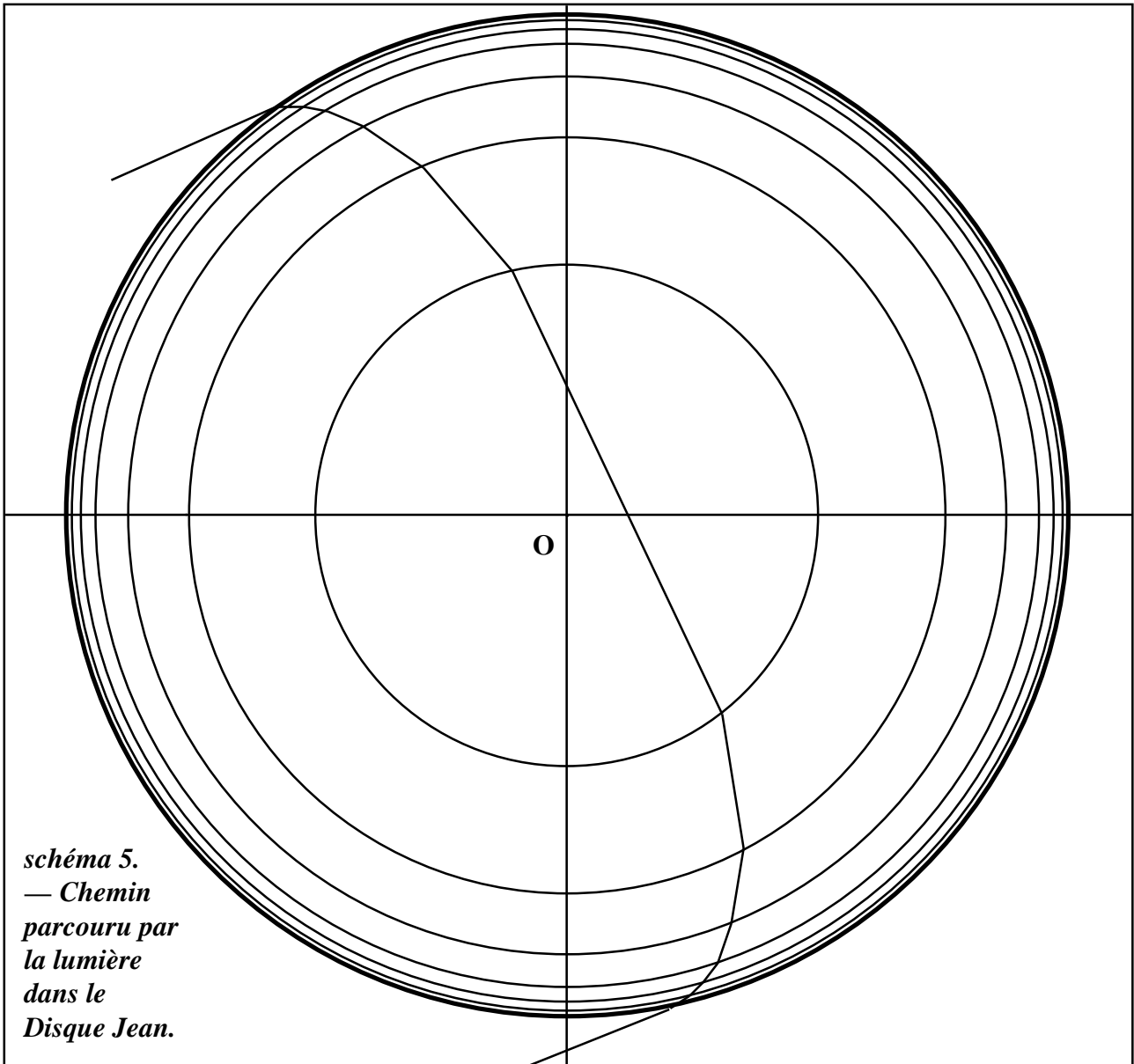
Interrogation sur le temps et l'espace, ce système géométrique que nous avons inventé paraît en fait fini pour un observateur extérieur, mais infini si nous nous trouvons à l'intérieur de ce système, à l'intérieur de notre ... “Disque Jean”.

On peut définir ces courbes comme étant les géodésiques de notre géométrie. Mais il reste notamment à prouver que par deux points distincts du disque, il passe une géodésique et une seule.

En réalité, cette recherche ne fait que commencer ...

die Ende.

[NDLR : le dessin ci-dessous est qualitatif ; il n'empêche qu'il est inversé : il correspond à des coefficients $c(M) = 2^{-n}$, plutôt que 2^n .]



*schéma 5.
— Chemin
parcouru par
la lumière
dans le
Disque Jean.*