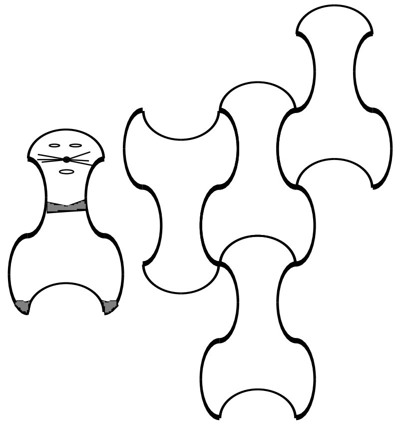
d'Escher aux pentaminos

par … du collège … (jumelage entre des élèves de 6ème-5ème du collège Pierre de Ronsard et du collège l'Ardillière de Nézant, de Saint Brice sous Forêt)

enseignants : Vincente Bartoli, Yann Bourit, Catherine Mandonnet

chercheur : Pierre Duchet, CNRS



Commentaires du chercheur :

La question posée dans le sujet initial était : Peut-on paver le plan avec des chats à la manière d'Escher ?

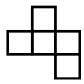
Je leur ai présenté le sujet à partir de reproductions de dessins d'Escher qui illustraient plusieurs types de pavages, avec des logiques de constructions différentes et des formes variées (en particulier des poissons). En fait, la recherche de chats paveurs a bien été une motivation constante pour eux, mais une grande partie de leur activité a consisté à étudier des formes très simples afin de découvrir des règles de pavage.

Voici un exemple de production de l'équipe, obtenu lors du deuxième séminaire (février 93). Il est nécessaire pour que les parties A et B de la forme considérée ici (forme qu'il est aisé de remplir pour figurer un chat sans oreilles vu de face) s'ajustent parfaitement que la partie A soit elle-même symétrique ; cette condition n'a pas été perçue par l'auteur du dessin.

Ce sont les contributions séparées des deux collèges qui ont été synthétisées ici en un seul article. Les formes pavantes d'Escher étaient peu manipulables : les enseignants ont fourni des pentaminos en bois pour permettre le démarrage de l'activité de recherche. En fait, la moitié des élèves a continué de chercher des formes pavantes ressemblant le plus possible à un chat, ce qui a conduit à des formes parfois très intéressantes mais que les élèves n'ont finalement pas retenues pour publication.

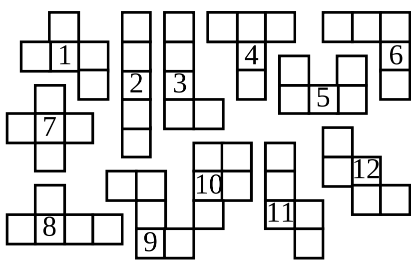
Qu'est-ce qu'un pentamino ?

Un pentamino est un assemblage de 5 carrés égaux mis dans n'importe quel ordre en les juxtaposant le long de leurs côtés, mais pas en diagonale. En voici un :



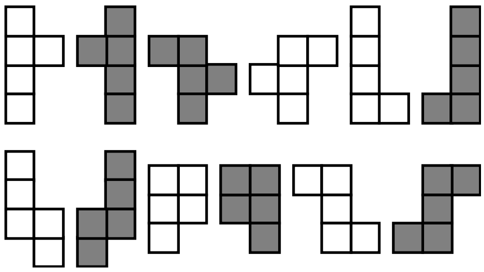
Combien y a-t-il de pentaminos ?

Après discussion entre nous et avec le professeur, nous avons trouvé 12 pentaminos, lorsqu'on s'autorise à les retourner.



Mais si on ne s'autorise pas à retourner les formes, alors il y a 18 pentaminos possibles, car on peut trouver 2 pentaminos différents correspondants à la figure 8.

De même pour les figures 1, 3, 9, 10 et 11.



En fait on s'est intéressé aux 12 pentaminos [retournables.]

Peut-on faire des rectanges avec les 12 pentaminos ?

Un pentamino est fait de 5 carrés et il y en a 12. Donc, 12×5 c. = 60 carrés.

Nous allons démontrer qu'il y a 4 sortes de rectangles que l'on peut paver avec les 12 pentaminos.

Il est impossible d'avoir un côté de 2 carrés car un pentamino comme la croix fait 3 dans toutes les directions.

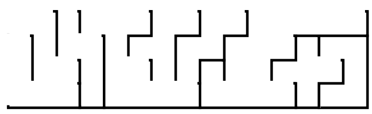
3 c. × 20 c. = 60 carrés
4 c. × 15 c. = 60 carrés
5 c. × 12 c. = 60 carrés
6 c. × 10 c. = 60 carrés
7 c. × ? = 60 carrés

Il n'y a pas de solution entière à cette équation car 7 n'est pas un diviseur de 60. Il en est de même pour 8 et 9 [et il n'est pas nécessaire d'essayer au-delà].

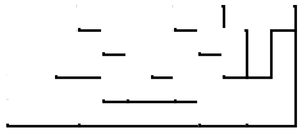
Tous les rectangles que nous avons trouvés peuvent être réalisés avec les 12 pentaminos.

Un rectangle de 3 × 20

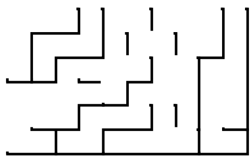
Un rectangle de 4 × 15



Des rectangles de 5 × 12 (exemple :)



Des rectangles de 6 × 10 (exemple :)



Peut-on faire un pavé avec les 12 pentaminos épais ?

Le père de l'un d'entre nous a fabriqué la famille des pentacubes.

Les pentacubes sont obtenus en collant des cubes égaux de la même manière que les pentaminos étaient obtenus avec des carrés.

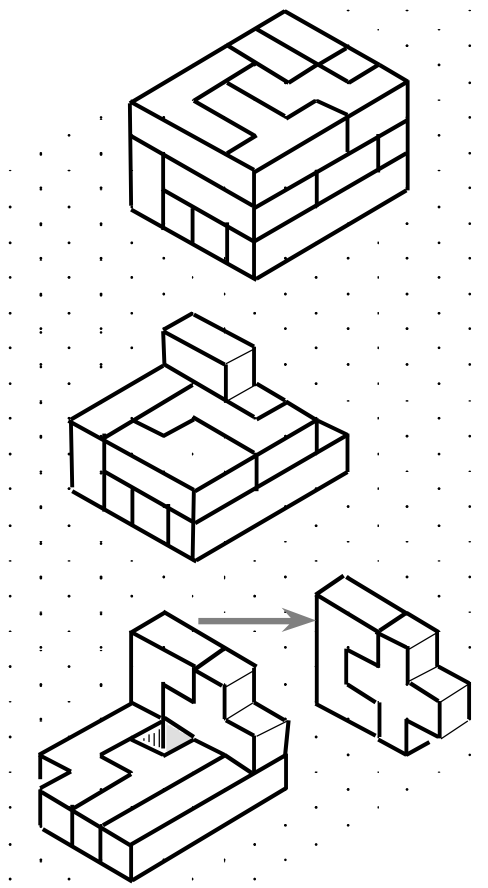
Nous avons essayé de remplir un pavé 3 c. × 4 c. × 5 c. = 60 cubes, et après de nombreux essais nous avons fini par trouver une solution. [NDLR : à partir d'une documentation fournie par les professeurs.]

Nous pouvons la dessiner sur 3 niveaux :

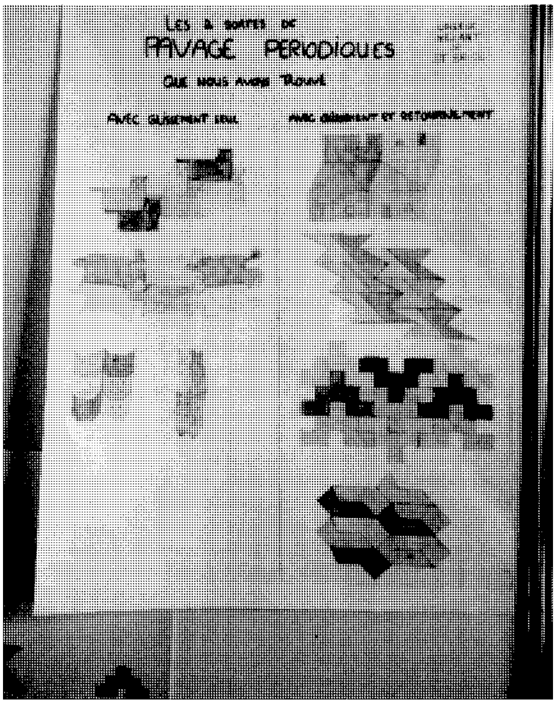
1^{er} niveau

$2^{ème}$ niveau

$3^{ème}$ niveau



[NDLR : nous avons ajouté un $4^{ème}$ niveau, pour permettre au lecteur de *voir* les deux pentacubes de derrière.]

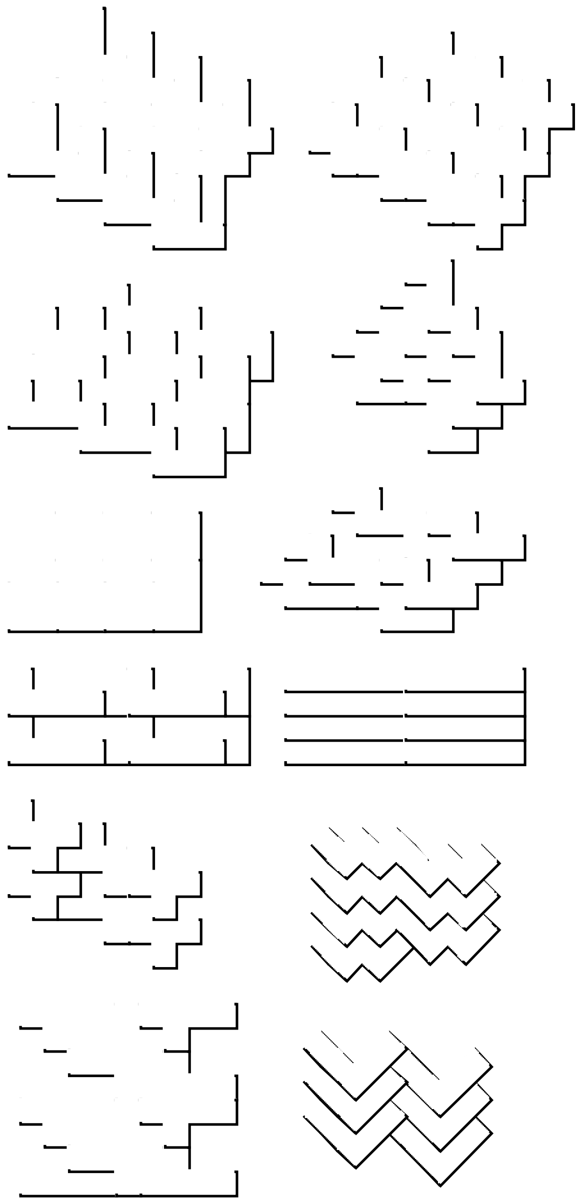


Peut-on paver une feuille infinie avec un pentamino ?

Nous avons fait des rectangles avec les 12 pentaminos, maintenant nous allons recouvrir une feuille infinie avec seulement un [type de] pentamino.

Nous avons constaté que c'était toujours possible. Pour certains pentaminos nous avons pu mettre en évidence des règles simples de construction.

Voici quelques unes de ces possibilités :

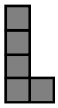
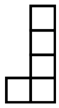


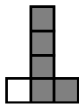
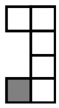
Exemple de fiche de travail fournie aux élèves dans un collège :

Escher A

1. Quels sont tous les rectangles faisables avec les 12 pentaminos de base ?
Réaliser ces rectangles.
2. Quels sont tous les pavés faisables avec les 12 pentacubes ?
Dessiner ces pavés en perspective.

Escher B

1. D'après les équipes de recherche, il semblerait qu'il n'y ait que 12 pentacubes. Serait-il possible de prouver cette affirmation ?
2. Si on colore les deux faces d'un pentamino de deux couleurs différentes, on s'aperçoit que deux pentaminos peuvent avoir la même forme sans être superposables :
exemple :  et 

ne se superposent pas :  ou 

Si on sépare les formes droite et gauche, combien obtient-on de pentaminos ?

Escher C

Un pavage réguliere est un pavage fait avec un seul motif qu'on fait glisser dans deux directions, sans tourner.
Avec chacun des 12 pentaminos de base, réaliser un pavage régulier.
Pour chacun de ces pavages, le motif est-il fait avec 1 ou 2 pentaminos ?
Séparer ainsi les 12 pentaminos en 2 familles.

Escher D

Lire :
"les 7 classes de frise"
dans tangente n° 20.
Réaliser une frise.
Chercher dans les livres de mathématique, ou dans d'autres livres, des exemples de pavage.